

研究ノート

しゃぼん玉とセッケン膜の 干渉スペクトルの解析のための理論式

松村敬治・塩野正明

Theoretical Equations for the Analyses of the
Interference Spectra of Soap and Soap-Bubble Films

Keiji Matsumura and Masaaki Shiono

はじめに

先の論文（松村・塩野，2012，2013，投稿中）では，しゃぼん玉の膜厚がマルチチャンネル分光器を用いた干渉スペクトルの測定により正確に決定できることを報告した。そこでは，測定した干渉スペクトルに対して，膜厚をパラメータにしたシミュレーションスペクトルをフィットさせることにより，膜厚を簡単に高精度に決定できることを示した。

本稿では，先の論文の理論的背景を明らかにすることと，理論と実験の間に生じるずれ（誤差）について考察することを目的とする。具体的には，しゃぼん玉の干渉スペクトルのシミュレーションを行うために用いた実験式を理論的に導出することと，シミュレーションスペクトルと実測スペクトルの間に生じるずれとその補正の仕方について考察することを目的とする。

シミュレーションに用いた干渉スペクトルの式

ここでは，しゃぼん玉の干渉スペクトルのシミュレーション解析に用いた数式について簡単に解説する。最初に，厚さ d のセッケン膜に垂直に入射した光が透過した後に起きる干渉について考える。この場合，光の波長 λ が次式の

関係を満たすとき、干渉縞は明るくなる。

$$\text{光路差} = 2n_s d = m\lambda \quad (1)$$

ここで、 m は干渉次数で、 $m=0, 1, 2, 3, \dots$ で示される整数値をとる。 n_s は膜の屈折率で光の波長に緩やかに依存する変数であるが、定数として扱う場合もある (n_s の s は soap film の s から付けた)。可視分光ではセッケン膜の透過率 T の波長依存性を測定することになるが、測定される干渉スペクトルは、(1)式を満たすとき透過率が大きくなるので波のようにうねりを生じ、次式で示す三角関数で近似できる。

$$T = a_t \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_t \quad (2)$$

ここで、 a_t と b_t は、それぞれ、フリンジ (fringe) の振幅と平均の透過率で、測定領域でセッケン液の光の吸収が無ければ、 $a_t + b_t \doteq 1$ となる。しゃぼん玉の測定の場合は、透過光は薄膜を2回透過するが、この場合でも膜が均一にできていれば、(2)式は成立する。ともかく、実験結果に合わせて、 a_t と b_t と $n_s d$ の値を適当に選ぶことにより、(2)式を用いて透過光の干渉スペクトルのシミュレーションを行うことができる。

つづいて、厚さ d のセッケン膜に垂直に入射した光が膜の外側や内側の界面で反射されて、入射光側に帰ってくる光に生じる干渉について考える。この場合、膜の外側での反射は、屈折率が小さい媒質 (空気) から大きい媒質 (膜) に入射するときの界面での反射となり、固定端での反射になるので、位相が π だけ (半波長分) 変化する。それゆえ光の波長 λ が、(1)式の関係を満たすとき、今度は干渉縞が暗くなる。反射光の可視分光では、セッケン膜の反射率 R の波長依存性を測定することになるが、測定される干渉スペクトルは、(1)式を満たすとき反射率が小さくなるので、次式で近似できる。

$$R = a_r \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right) + b_r \quad (3)$$

ここで、 a_r と b_r は、それぞれ、フリンジの振幅と平均の反射率で、測定領域でセッケン液に対する光の吸収や蛍光の影響が無ければ、 $b_r - a_r \doteq 0$ となる。

(3)式はしゃぼん玉の測定の場合でも成立する。実験結果に合わせて、 a_r と b_r と $n_s d$ の値を適当に選ぶことにより、(3)式を用いて反射光の干渉スペクトルに対するシミュレーションを行うことができる。反射光に対する(3)式は、透過光に対する(2)式に類似した形をしているが、両者は位相が π だけ異なり、このことは膜の外側と内側における固定端の反射と自由端の反射の違いに起因する。

本稿は、(2)式および(3)式を理論的に導出することと、(2)式あるいは(3)式と実測スペクトルの間に生じるずれ（誤差）とその補正の仕方を考察することを目的としている。

干渉スペクトルの理論式の導出

ここでは、干渉スペクトルの実験式を物理光学の基礎的な数式を用いて導出し、(2)式および(3)式の表記に用いた a_i , b_i , a_r , および b_r が屈折率を用いて具体的にどのような数式で表現されるかを明らかにする。ここでの導出にあたっては、物理光学の入門書（谷田貝，2010，69–70）を参考にした。

A. 界面に入射する光と反射光および透過光の関係

いま、角周波数 ω の光波（光） i が屈折率 n_0 の媒質中を x 方向に進んでいるとする。このとき、時間 t における光 i の電界ベクトル $E_i(x, t)$ は次式で表現される。

$$E_i(x, t) = A_i e^{-i\omega t + ik_0 x} \quad (4)$$

ここで、 A_i は振幅であり、 k_0 は波数で、真空中の波長 λ を用いて次式で定義される。

$$k_0 = \frac{2\pi n_0}{\lambda} \quad (5)$$

また、 ω と λ と真空中の光速 c の間には次式の関係が成立する。

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (6)$$

光の強度は、電界ベクトルの振幅の絶対値の二乗に比例する量であるが、比例定数を1として議論を進めると、入射光*i*の強度 I_i は次式で表される。

$$I_i = |E_i|^2 = E_i^* E_i = A_i^2 \quad (7)$$

ここで、*は複素共役であることを示す。

つづいて、図1に示すように、屈折率 n_s の光の吸収の無い透明な媒質でできた膜の外や内で起きる光の入射や反射・透過について考える。図1の左側に示すように、光が膜に垂直に入射して膜の表面での反射と膜の中への透過が同時に起きる場合、入射光*i*の電界ベクトルは(4)式で示されるが、反射光*R*と透過光*T*の電界ベクトル E_R と E_T は、それぞれ、次式で表現される。

$$E_R(x, t) = A_R e^{-i\omega t - ik_0 x} \quad (8)$$

$$E_T(x, t) = A_T e^{-i\omega t + ik_s x} \quad (9)$$

ここで、 A_R と A_T は振幅であり、 k_s は次式で定義される波数である。

$$k_s = \frac{2\pi n_s}{\lambda} \quad (10)$$

光波が境界面に入射して反射光と透過光になるとき、境界面の前後で光波の変位は滑らかに変化するはずであるから、光波の変位の連続性と光波の変位の微係数の連続性が保たれているはずである。それゆえ、境界面を*x*軸の原点にとるとき、次の2つの式が成り立つ。

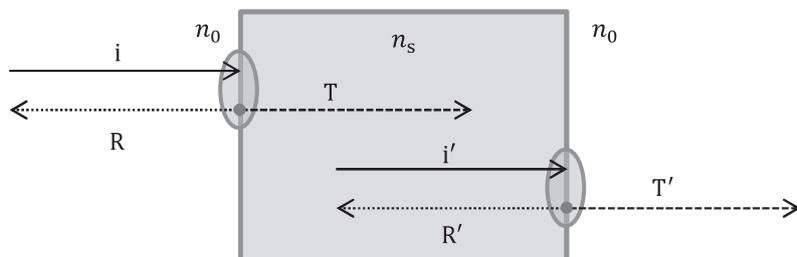


図1 膜の表面と膜の中の界面への光の入射と光の反射・透過

$$E_i(0, t) + E_R(0, t) = E_T(0, t) \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial (E_i + E_R)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial E_T}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (12)$$

これらの式に、(4)、(8)、および(9)式を代入すると次式が得られる。

$$A_i + A_R = A_T \quad (13)$$

$$n_0 A_i - n_0 A_R = n_s A_T \quad (14)$$

境界面での振幅反射率 r と振幅透過率 t は、(13)式と(14)式から次のように表される。

$$r = \frac{A_R}{A_i} = \frac{n_0 - n_s}{n_s + n_0} \quad (15)$$

$$t = \frac{A_T}{A_i} = \frac{2n_0}{n_s + n_0} \quad (16)$$

次に膜の中での光の反射と透過を考える。図1の右側に示すように、屈折率 n_s の膜の内側にある光が屈折率 n_0 の媒質との境界面に垂直に入射して、膜の中への反射と膜の外への透過が同時に起きる場合、入射光 i' 、反射光 R' 、および透過光 T' の電界ベクトル $E_{i'}$ 、 $E_{R'}$ 、および $E_{T'}$ は、それぞれ、次の式で表される。

$$E_{i'}(x, t) = A_{i'} e^{-i\omega t + ik_s x} \quad (17)$$

$$E_{R'}(x, t) = A_{R'} e^{-i\omega t - ik_s x} \quad (18)$$

$$E_{T'}(x, t) = A_{T'} e^{-i\omega t + ik_0 x} \quad (19)$$

膜の中での光の反射と透過の場合も、境界面での光波の変位の連続性が要請されるので、(11)式と(12)式に相当する条件式が成立して、次式が導出される。

$$A_I + A_R = A_T \quad (20)$$

$$n_s A_I - n_s A_R = n_0 A_T \quad (21)$$

境界面での振幅反射率 r' と振幅透過率 t' は、(20)式と(21)式から次のように表される。

$$r' = \frac{A_R}{A_I} = \frac{n_s - n_0}{n_s + n_0} \quad (22)$$

$$t' = \frac{A_T}{A_I} = \frac{2n_s}{n_s + n_0} \quad (23)$$

ここまでの数式の導出により、干渉スペクトルを理論的に扱うための準備がすべて整った。膜の外で入射する光の反射率 r と透過率 t は(15)式と(16)式で与えられ、膜の中での光の反射率 r' と透過率 t' は(22)式と(23)式で与えられる。また、これらの式から次の2つの関係式が成立することがわかる。

$$r^2 + tt' = 1 \quad (24)$$

$$r = -r' \quad (25)$$

(25)式の関係は、膜の外での反射と膜の中での反射では、電界ベクトルの位相が異なることを意味する。 n_0 を大気屈折率とし、 n_s をセッケン膜などの薄膜の屈折率としているので、 $n_s > n_0$ となり、(15)式から $r < 0$ 、(22)式から $r' > 0$ が成立する。振幅反射率 r が負になることは、屈折率が小さい媒質から大きい媒質へ入射するときの界面での反射は固定端反射になり、反射された光は位相が π (半波長だけ) ずれることを意味する。一方、振幅反射率 r' が正になることは、屈折率が大きい媒質から小さい媒質へ入射するときの界面での反射は自由端反射になり、反射された光は位相が変化しないことを意味する。

B. 薄膜の干渉スペクトルの理論的扱い

薄膜で起きる干渉について考えるための準備として、図2に示す光 i の入射

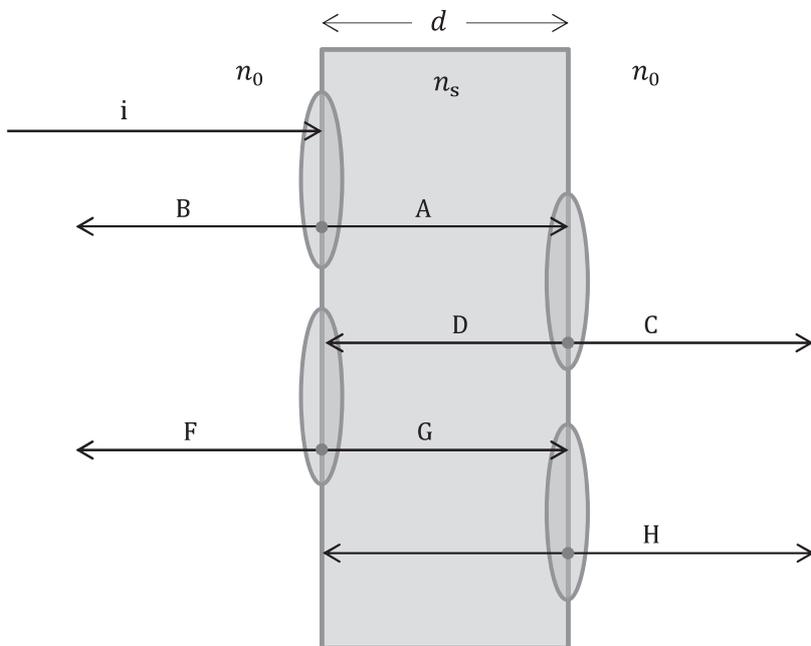


図2 膜の干渉に関係した光の入射と光の反射・透過

と続いて起きるいくつかの反射と透過について考える。このとき、膜の外から入射する光の反射と透過に対しては(15)式と(16)式で定義される r と t を用い、膜の中での光の反射と透過に対しては(22)式と(23)式で定義される r' と t' を用いてそれぞれの光波の振幅を考えることにする。

最初に光 i が膜の表面に垂直に入射して透過光 A と反射光 B が生じる場合について考える。このとき、それぞれの光波の振幅の間には次式の関係が成り立つ。

$$A_A = tA_i \tag{26}$$

$$A_B = rA_i = -r'A_i \tag{27}$$

ここで、(27)式の導出には(25)式を用いた。

膜の中の光 A が膜の右側の界面に入射して透過光 C と反射光 D が生じるとする。このとき、それぞれの光波の振幅の間には次式の関係が成り立つ。

$$A_C = t'A_A = tt'A_i \quad (28)$$

$$A_D = r'A_A = r'tA_i \quad (29)$$

膜の中の光 D が膜の左側の界面に入射して透過光 F と反射光 G が生じるとする。このとき、それぞれの光波の振幅の間には次式の関係が成り立つ。

$$A_F = t'A_D = r'tt'A_i \quad (30)$$

$$A_G = r'A_D = r'r'tA_i \quad (31)$$

膜の中の光 G が膜の右側の界面に入射して透過光 H と反射光を生じるとする（このときの反射光は今後の議論には使用しない）。このとき、光波 H の振幅には次式の関係が成り立つ。

$$A_H = t'A_G = r'r'tt'A_i \quad (32)$$

ここまでの式で、干渉スペクトルを考えるための準備ができた。つづいて、薄膜における干渉について、具体的に考察する。

B-1 反射光の干渉スペクトル

ここでは、図 2 において入射した光 i が厚さ d の薄膜の界面で反射されるときに生じる干渉について考える。この場合、膜の外の界面で反射した光 B と膜の中の界面で反射して出てくる光 F が重なり合って生じる干渉になる。それゆえ、薄膜での反射光の干渉を考える場合は、光 B と光 F の電界ベクトルの重ね合わせを考えれば良いことになる。

光 B の電界ベクトルは、(8)式と類似した形の次式で表される。

$$E_B(x, t) = A_B e^{-i\omega t - ik_0 x} \quad (33)$$

この式に(27)式、(4)式を適用していくと、次式のように変形される。

$$\begin{aligned}
 E_B(x, t) &= -r'A_i e^{-i\omega t - ik_0 x} \\
 &= -r'E_i(-x, t) \\
 &= \alpha_R e^{-i\pi} E_i(-x, t)
 \end{aligned} \tag{34}$$

ただし, α_R は次式で定義する。

$$\alpha_R = r' \tag{35}$$

光 F の光路は光 B に比べて厚さ d の膜の中を往復する分増えているから, 光路差は $2n_s d$ となり, 位相差は次式で表される。

$$\text{位相差} = 2\pi \frac{2n_s d}{\lambda} = \frac{4\pi n_s d}{\lambda} \tag{36}$$

光 F の電界ベクトルは, (33) 式と類似した形の式に位相差を考慮するので, 次式で表される。

$$E_F(x, t) = A_F e^{i\frac{4\pi n_s d}{\lambda}} e^{-i\omega t - ik_0 x} \tag{37}$$

この式に (30) 式と (4) 式を代入すると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 E_F(x, t) &= r'tt'A_i e^{i\frac{4\pi n_s d}{\lambda}} e^{-i\omega t - ik_0 x} \\
 &= \beta_R e^{i\frac{4\pi n_s d}{\lambda}} E_i(-x, t)
 \end{aligned} \tag{38}$$

ただし, β_R は次式で定義する。

$$\beta_R = r'tt' \tag{39}$$

よって, 光 B と光 F の電界ベクトルの重ね合わせによる干渉は, (34) 式と (38) 式を用いると次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 E_B(x, t) + E_F(x, t) &= \alpha_R e^{-i\pi} E_i(-x, t) + \beta_R e^{i\frac{4\pi n_s d}{\lambda}} E_i(-x, t) \\
 &= \left(\alpha_R e^{-i\pi} + \beta_R e^{i\frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) E_i(-x, t) \\
 &= \left\{ \alpha_R + \beta_R e^{i\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right)} \right\} e^{-i\pi} E_i(-x, t)
 \end{aligned} \tag{40}$$

反射光の強度 I_R は, (40) 式, (4) 式, (7) 式, およびオイラーの公式を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned}
 I_R &= |E_B(x, t) + E_F(x, t)|^2 \\
 &= \{E_B(x, t) + E_F(x, t)\}^* \{E_B(x, t) + E_F(x, t)\} \\
 &= \left\{ \alpha_R + \beta_R e^{-i\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right)} \right\} \left\{ \alpha_R + \beta_R e^{i\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right)} \right\} A_i^2 \\
 &= \left\{ \alpha_R^2 + \beta_R^2 + 2\alpha_R \beta_R \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right) \right\} I_i \\
 &= \left\{ a_r \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right) + b_r \right\} I_i \tag{41}
 \end{aligned}$$

ただし、 a_r と b_r は次式で定義する。

$$a_r = 2\alpha_R \beta_R \tag{42}$$

$$b_r = \alpha_R^2 + \beta_R^2 \tag{43}$$

反射率 R は(41)式から次式で表される。

$$R = \frac{I_R}{I_i} = a_r \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right) + b_r \tag{44}$$

よって、この式により反射光の干渉スペクトルの解析に用いた(3)式を理論的に導出できた。

B-2 透過光の干渉スペクトル—薄膜が1枚の場合

ここでは、図2において入射した光 i が厚さ d の薄膜を透過するとき生じる干渉について考える。この場合、膜をそのまま透過してきた光 C と、膜の出口側と入口側で反射した後に透過してきた光 H の間の干渉になる。それゆえ、薄膜での透過光の干渉を考える場合は、光 C と光 H の電界ベクトルの重ね合わせを考えれば良いことになる。

光 C の電界ベクトルは、(19)式と類似した形の次式で表される。

$$E_C(x, t) = A_c e^{-i\omega t + ik_0 x} \tag{45}$$

この式に(28)式と(4)式を適用していくと、次式のように変形される。

$$\begin{aligned}
 E_C(x, t) &= t t' A_i e^{-i\omega t + ik_0 x} \\
 &= \alpha_T E_i(x, t) \tag{46}
 \end{aligned}$$

ただし、 α_T は次式で定義する。

$$\alpha_T = tt' \quad (47)$$

光 H の光路は光 C に比べて厚さ d の膜の中を往復する分増えているから、光路差は $2n_s d$ となり、位相差は(36)式で表される。光 H の電界ベクトルは、(45)式と類似した形の式に位相差を考慮するので、次式で表される。

$$E_H(x, t) = A_H e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} e^{-i\omega t + ik_0 x} \quad (48)$$

この式に(32)式と(4)式を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} E_H(x, t) &= r' r' t t' A_i e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} e^{-i\omega t + ik_0 x} \\ &= \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} E_i(x, t) \end{aligned} \quad (49)$$

ただし、 β_T は次式で定義する。

$$\beta_T = r' r' t t' \quad (50)$$

よって、光 C と光 H の電界ベクトルの重ね合わせは、(46)式と(49)式を用いると次式のように表される。

$$E_C(x, t) + E_H(x, t) = \left(\alpha_T + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) E_i(x, t) \quad (51)$$

膜を1回透過したときの透過光の強度 I_{T1} は、(51)式、(4)式、(7)式、およびオイラーの公式を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} I_{T1} &= |E_C(x, t) + E_H(x, t)|^2 \\ &= \{E_C(x, t) + E_H(x, t)\}^* \{E_C(x, t) + E_H(x, t)\} \\ &= \left(\alpha_T + \beta_T e^{-i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) \left(\alpha_T + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) A_i^2 \\ &= \left\{ \alpha_T^2 + \beta_T^2 + 2\alpha_T \beta_T \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) \right\} I_i \\ &= \left\{ a_{11} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_{11} \right\} I_i \end{aligned} \quad (52)$$

ただし、 a_{11} と b_{11} は次式で定義する。

$$a_{11} = 2\alpha_T \beta_T \quad (53)$$

$$b_{11} = \alpha_T^2 + \beta_T^2 \quad (54)$$

膜を1回透過した光の透過率 T_1 は(52)式から次式で表される。

$$T_1 = \frac{I_{T1}}{I_i} = a_{11} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_{11} \quad (55)$$

よって、この式により透過光の干渉スペクトルの解析に用いた(2)式と同じ形の式を理論的に導出できた。

B-3 透過光の干渉スペクトル—薄膜が2枚の場合

しゃぼん玉の透過光の干渉スペクトルを理論的に扱うためには、2枚の薄膜を透過する光に対して起きる干渉について考察しないといけない。ここでは、しゃぼん玉の膜が均一にできている場合について考えることにするので、図2に相当する膜が2つあるものとして議論する。しゃぼん玉の1つ目の薄膜を透過した光が2つ目の薄膜に入射するとき、この入射する光の電界ベクトル E_{T1} は、(51)式にしゃぼん玉の直径に相当する光路を考慮した式で表現できるが、この光路の表現は2つ目の膜の干渉には影響を与えないので、省略することができる。よって、 E_{T1} として次式を用いることができる。

$$\begin{aligned} E_{T1} &= E_C(x, t) + E_H(x, t) \\ &= \left(\alpha_T + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) E_i(x, t) \end{aligned} \quad (56)$$

この E_{T1} が2つ目の膜に入射した後に透過して出てきた光がしゃぼん玉の透過光の干渉スペクトルとして測定される。この場合、2つ目の膜をそのまま透過してきた光 $C2$ と、2つ目の膜の出口側と入口側で反射した後に透過してきた光 $H2$ の間の干渉になる。それゆえ、しゃぼん玉の透過光の干渉を考える場合は、光 $C2$ と光 $H2$ の電界ベクトルの重ね合わせを考えれば良いことになる。

光 $C2$ の電界ベクトルは、(46)式の $E_i(x, t)$ を $E_{T1}(x, t)$ で置き換えることにより次式で表される。

$$E_{C2}(x, t) = \alpha_T E_{T1}(x, t) \quad (57)$$

同様にして、光 $H2$ の電界ベクトルは、(49)式の $E_i(x, t)$ を $E_{T1}(x, t)$ で置き換えることにより次式で表される。

$$E_{H2}(x, t) = \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} E_{T1}(x, t) \quad (58)$$

よって、光 C2 と光 H2 の電界ベクトルの重ね合わせは、(57), (58), および (56) 式を用いると次式のように表される。

$$\begin{aligned} E_{C2}(x, t) + E_{H2}(x, t) &= \alpha_T E_{T1}(x, t) + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} E_{T1}(x, t) \\ &= \left(\alpha_T + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) E_{T1}(x, t) \\ &= \left(\alpha_T + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) \left(\alpha_T + \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} \right) E_i(x, t) \\ &= \left(\alpha_T^2 + 2\alpha_T \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} + \beta_T^2 e^{i \frac{8\pi n_s d}{\lambda}} \right) E_i(x, t) \end{aligned} \quad (59)$$

2枚の薄膜を透過したときの透過光の強度 I_{T2} は、(59)式、(4)式、(7)式、およびオイラーの公式を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} I_{T2} &= |E_{C2}(x, t) + E_{H2}(x, t)|^2 \\ &= \{E_{C2}(x, t) + E_{H2}(x, t)\}^* \{E_{C2}(x, t) + E_{H2}(x, t)\} \\ &= \left(\alpha_T^2 + 2\alpha_T \beta_T e^{-i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} + \beta_T^2 e^{-i \frac{8\pi n_s d}{\lambda}} \right) \left(\alpha_T^2 + 2\alpha_T \beta_T e^{i \frac{4\pi n_s d}{\lambda}} + \beta_T^2 e^{i \frac{8\pi n_s d}{\lambda}} \right) A_i^2 \\ &= \left\{ a_{12} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_{12} + c_{12} \cos\left(\frac{8\pi n_s d}{\lambda}\right) \right\} I_i \end{aligned} \quad (60)$$

ただし、 a_{12} , b_{12} , および c_{12} は次式で定義する。

$$a_{12} = 4(\alpha_T^3 \beta_T + \alpha_T \beta_T^3) \quad (61)$$

$$b_{12} = \alpha_T^4 + 4\alpha_T^2 \beta_T^2 + \beta_T^4 \quad (62)$$

$$c_{12} = 2\alpha_T^2 \beta_T^2 \quad (63)$$

膜を2回透過した光の透過率 T_2 は(60)式から次式で表される。

$$T_2 = \frac{I_{T2}}{I_i} = a_{12} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_{12} + c_{12} \cos\left(\frac{8\pi n_s d}{\lambda}\right) \quad (64)$$

通常、係数 c_{12} は、 a_{12} や b_{12} に比べて 1桁小さな値になるので、(64)式は次式で近似できる。

$$T_2 \doteq a_{12} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_{12} \quad (65)$$

よって、この式により、しゃぼん玉の透過光の干渉スペクトルの解析に用いた(2)式と同じ形の式を理論的に導出できた。

B-4 干渉スペクトルの理論式のとまとめ

今回導出した干渉スペクトルの理論式を式の番号と共に表1と表2にまとめて掲載する。表1には、最初に振幅反射率と振幅透過率の数式を示し、つづいて反射光の干渉スペクトルに関係した数式を示した。表2には、薄膜を1回透過する場合(セッケン膜の場合)と薄膜を2回透過する場合(しゃぼん玉の場合)の透過光の干渉スペクトルに関係した数式を示した。図3には、表1と表2の変数や係数が、大気の屈折率 n_0 を1に固定して薄膜の屈折率 n_s を1か

表1 反射光の干渉スペクトルに関する数式

振幅反射率	$r = \frac{n_0 - n_s}{n_s + n_0} \quad (15)$
	$r' = \frac{n_s - n_0}{n_s + n_0} \quad (22)$
振幅透過率	$t = \frac{2n_0}{n_s + n_0} \quad (16)$
	$t' = \frac{2n_s}{n_s + n_0} \quad (23)$
補助パラメータ	$\alpha_R = r' \quad (35)$
	$\beta_R = r'tt' \quad (39)$
反射光の干渉スペクトル	$R = a_r \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda} + \pi\right) + b_r \quad (3), (44)$
	$a_r = 2\alpha_R \beta_R \quad (42)$
	$b_r = \alpha_R^2 + \beta_R^2 \quad (43)$

ら 2.5 まで変化させたとき、どのように変化するかを 4 つのグラフに分けて掲示した。

図 3-a は、膜に垂直に入射する光に対する振幅反射率 r と振幅透過率 t および膜の中の光に対する振幅反射率 r' と振幅透過率 t' の変化のようすを示す。

図 3-b は、反射光の干渉スペクトルの理論式に現れる係数 a_r , b_r と $b_r - a_r$ のグラフを示す。この図から、干渉フリッジ強度は屈折率 n_s の増加と共に大きくなることと、 $b_r - a_r \approx 0$ が良い近似であることがわかる。

図 3-c は、1 枚の薄膜に生じる透過光の干渉スペクトルの理論式に現れる係数 a_{t1} , b_{t1} と $a_{t1} + b_{t1}$ のグラフを示す。この図から、干渉フリッジ強度は屈折率 n_s の増加と共に大きくなることと、屈折率 n_s が 2 までは、 $a_{t1} + b_{t1} \approx 1$ が良い近似であることがわかる。

図 3-d は、薄膜が 2 枚重なっているときに生じる透過光の干渉スペクトルの式に現れる係数 a_{t2} , b_{t2} と $a_{t2} + b_{t2}$ のグラフを示す。この図から、干渉フリッジ強度は屈折率 n_s の増加と共に大きくなることと、屈折率 n_s が 1.7 までは、

表 2 透過光の干渉スペクトルに関する数式

補助パラメータ	$a_T = tt'$	(47)
	$\beta_T = r'r'tt'$	(50)
透過光の干渉スペクトル ($j=1, 2$)	$T_j = a_{vj} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b_{vj}$	(2), (55), (65)
セッケン膜の場合の係数	$a_{t1} = 2a_T\beta_T$	(53)
	$b_{t1} = a_T^2 + \beta_T^2$	(54)
しゃぼん玉の膜の場合の係数	$a_{t2} = 4(a_T^3\beta_T + a_T\beta_T^3)$	(61)
	$b_{t2} = a_T^4 + 4a_T^2\beta_T^2 + \beta_T^4$	(62)

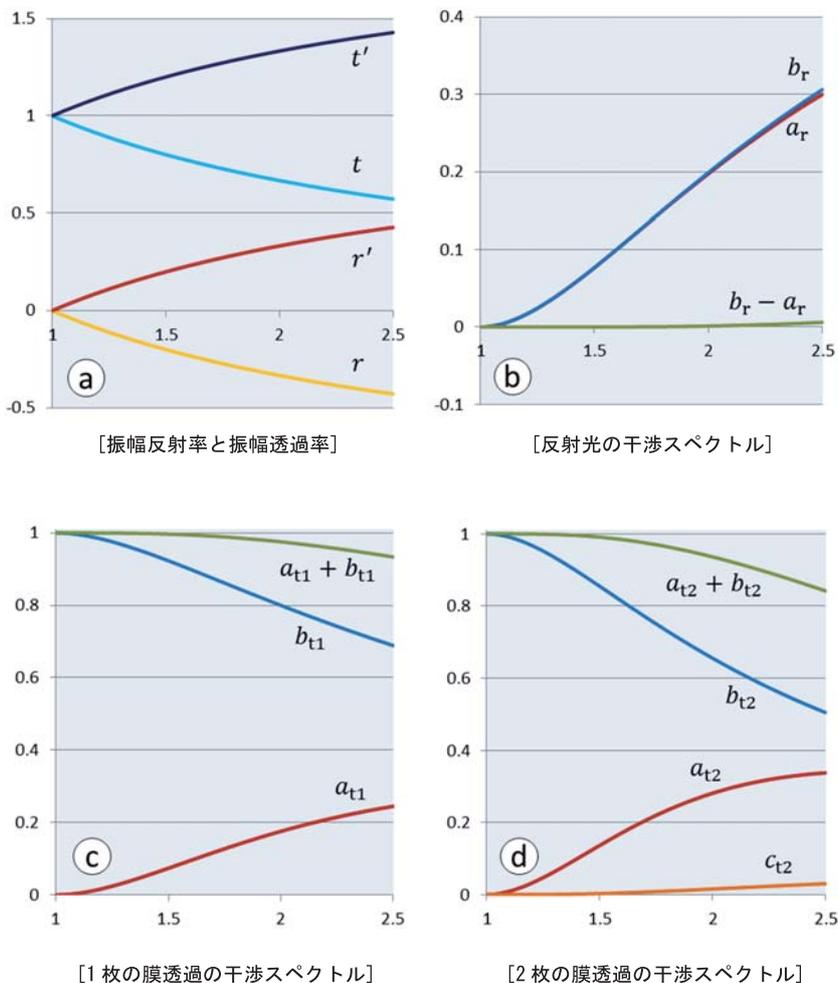


図3 表1と表2に出てくるパラメータの屈折率依存性（横軸：屈折率 n_s ）

$a_{t2} + b_{t2} \approx 1$ が良い近似であることがわかる。この図には、(63)式で定義される c_{t2} のグラフも示している。 c_{t2} は、 a_{t2} や b_{t2} に比べて小さな値になるので、(65)式が良い近似であることがわかる。この図の a_{t2} と図3-cの a_{t1} を比べると、 n_s が小さいときは a_{t2} の値が約2倍の大きさになっている。これらのことから、膜

厚 d の 2 枚の膜を透過した光に起きる干渉は、膜が 1 枚増えた分、強度が大きくなると同時に、(64)式の第 3 項に示すように、膜厚 $2d$ の膜に相当する干渉が弱いながらも生じることがわかる。

C. 干渉スペクトルの理論式と測定スペクトルの間のずれに対する補正

ここまでの議論では、薄膜の膜厚の不均一性の問題や、測定装置の分解能の問題については触れなかった。先の論文（松村・塩野，2013，投稿中）では、(2)式あるいは(3)式を用いて描いたシミュレーションスペクトルは、実測スペクトルのフリンジの周期は良く再現するが、強度は短波長側で再現しないことを示していた。フリンジの強度まで再現するシミュレーションスペクトルを描くためには、膜厚の不均一性や測定装置の分解能の問題まで考慮しないとけない。この節においては、これらの問題に対する補正の仕方を誤差論的な手法を用いて考察する。

透過光の干渉スペクトルに対する(2)式も、反射光の干渉スペクトルに対する(3)式も、基本的に同じ形をした三角関数なので、測定誤差などについて議論するときは同じように扱うことができる。そこで、ここでは(2)式を用いて、フリンジの強度の分解能依存性や膜の均一度依存性について考察する。

いま、関数 $f(x)$ が $x = \theta$ のとき極値を持つとする。 $f(x)$ を $x = \theta$ のまわりでテイラー展開すると次式となる。

$$f(x) = f(\theta) + f'(\theta)(x - \theta) + \frac{f''(\theta)}{2!}(x - \theta)^2 + \dots \quad (66)$$

これ以後、(66)式の 3 次以上の高次項をゼロと仮定して議論を進めて行く。フリンジの式 F は、(2)式を参考にした次式で表現できるとする。

$$F = a \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) + b \quad (67)$$

(67)式は、極大値 $a + b$ と極小値 $-a + b$ を持つ。ここでは、その極大値と極小値に対して膜の不均一度や測定装置の分解能の影響を議論する。

いま、膜厚 d の不均一度を Δd とし、波長 λ の不均一度、即ち、分解能を $\Delta \lambda$ とする。最初にフリンジの極大値に対する Δd の影響を、(66)式を利用し

て考察する。(67)式の膜厚 d による1回偏微分と2回偏微分は次のようになる (d による F の偏微分とは、 F を構成する d 以外の変数を定数と見做して、 F を d で微分することを意味する)。

$$\frac{\partial F}{\partial d} = -\frac{4\pi n_s a}{\lambda} \sin\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial d^2} = -\frac{16\pi^2 n_s^2 a}{\lambda^2} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) \quad (69)$$

(67)式の極大値の条件は次式で与えられる。

$$\frac{4\pi n_s d}{\lambda} = \theta_M = 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (70)$$

ここで、 m は(1)式で言及した干渉次数である。 θ_M が(70)式を満たすとき、 $\sin\theta_M = 0$ 、 $\cos\theta_M = 1$ となるので、この関係を(68)式と(69)式に代入すると次式が成立する。

$$\left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_{\theta_M} = 0 \quad (71)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2}\right)_{\theta_M} = -\frac{16\pi^2 n_s^2 a}{\lambda^2} \quad (72)$$

(67)式に対して膜厚 d を変数として極大値のときの膜厚 d_M のまわりで(66)式と同様の展開を行い、変形すると次式が得られる。

$$F(d) - F(d_M) = \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_{\theta_M} (d - d_M) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2}\right)_{\theta_M} (d - d_M)^2 \quad (73)$$

ここで、(73)式を誤差論的に扱うことにする。(73)式の左辺の $F(d) - F(d_M)$ を膜厚 d が関与するフリンジの強度 F の変動 ΔF_d で置き換え、 $d - d_M$ を Δd で置き換えると次式が得られる。

$$\Delta F_d = \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_{\theta_M} \Delta d + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2}\right)_{\theta_M} \Delta d^2 \quad (74)$$

(74)式に(71)式と(72)式を代入すると次式が得られる。

$$\Delta F_d = -\frac{8\pi^2 n_s^2 a}{\lambda^2} \Delta d^2 \quad (75)$$

この式から、膜の不均一度 Δd は、フリンジの極大値を小さくするように影響することがわかる。

つづいて、同様な手法を用いてフリンジの極大値の分解能 $\Delta\lambda$ に対する依存性について考える。(67)式の波長 λ による偏微分は次のようになる。

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{4\pi n_s da}{\lambda^2} \sin\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) \quad (76)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = -\frac{8\pi n_s da}{\lambda^3} \sin\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) - \frac{16\pi^2 n_s^2 d^2 a}{\lambda^4} \cos\left(\frac{4\pi n_s d}{\lambda}\right) \quad (77)$$

θ_M が(70)式を満たすとき、(76)式と(77)式は次の値を持つ。

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\theta_M} = 0 \quad (78)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right)_{\theta_M} = -\frac{16\pi^2 n_s^2 d^2 a}{\lambda^4} \quad (79)$$

(67)式に対して波長 λ を変数として極大値のときの波長 λ_M のまわりで(66)式と同様の展開を行い、変形すると次式が得られる。

$$F(\lambda) - F(\lambda_M) = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\theta_M} (\lambda - \lambda_M) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right)_{\theta_M} (\lambda - \lambda_M)^2 \quad (80)$$

ここで、(80)式を誤差論的に扱うことにする。(80)式の左辺の $F(\lambda) - F(\lambda_M)$ を波長 λ の不均一度(分解能)が関与するフリンジの強度 F の変動 ΔF_λ で置き換え、 $\lambda - \lambda_M$ を $\Delta\lambda$ で置き換えると次式が得られる。

$$\Delta F_\lambda = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\theta_M} \Delta\lambda + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right)_{\theta_M} \Delta\lambda^2 \quad (81)$$

(81)式に(78)式と(79)式を代入すると次式が得られる。

$$\Delta F_\lambda = -\frac{8\pi^2 n_s^2 d^2 a}{\lambda^4} \Delta\lambda^2 \quad (82)$$

この式から、装置の分解能が低下すると、フリンジの極大値が小さくなることがわかる。

ここまでの議論で、(67)式の極大値に対する膜厚の不均一度 Δd や分解能 $\Delta\lambda$ の影響をそれぞれ別々に考察して、(75)式と(82)式を得た。

実測スペクトルにおいては Δd と $\Delta \lambda$ の影響が同時に極大値に現れてくるので、 Δd と $\Delta \lambda$ の影響を同時に取り入れたときの極大値の変動 ΔF が ΔF_d と ΔF_λ を用いてどのように表されるかを考えないといけない。もし、 Δd と $\Delta \lambda$ の符号によって ΔF_d と ΔF_λ の符号も変わるなら、 ΔF は ΔF_d と ΔF_λ の2乗和の平方根で表されるはずである。しかし、(75)式や(82)式からもわかる通り、 ΔF_d や ΔF_λ は Δd や $\Delta \lambda$ の符号に依存しない。この場合は、 Δd と $\Delta \lambda$ の両方を同時に考慮した極大値の変動 ΔF は(75)式と(82)式の単純な加算になり、次式で表現される。

$$\Delta F = \Delta F_d + \Delta F_\lambda = -\frac{8\pi^2 n_s^2 a}{\lambda^2} \Delta d^2 - \frac{8\pi^2 n_s^2 d^2 a}{\lambda^4} \Delta \lambda^2 \quad (83)$$

よって、(67)式の極大値 $a+b$ は、膜厚の不均一度 Δd や波長の不均一度 $\Delta \lambda$ により、次のように変動する。

$$a+b \rightarrow a \left(1 - \frac{8\pi^2 n_s^2}{\lambda^2} \Delta d^2 - \frac{8\pi^2 n_s^2 d^2}{\lambda^4} \Delta \lambda^2 \right) + b \quad (84)$$

この関係から、 Δd や $\Delta \lambda$ の影響で極大値の値が小さくなり、干渉フリンジの極大値の付近は滑らかになっていることがわかる。

一方、(67)式の極小値に対して、(68)式から(83)式までの議論と同じようなことを行うと、(67)式の極小値 $-a+b$ は、膜厚の不均一度 Δd や波長の不均一度 $\Delta \lambda$ により、次のように変化することを示すことができる。

$$-a+b \rightarrow -a \left(1 - \frac{8\pi^2 n_s^2}{\lambda^2} \Delta d^2 - \frac{8\pi^2 n_s^2 d^2}{\lambda^4} \Delta \lambda^2 \right) + b \quad (85)$$

この関係と(84)の関係をまとめると、 Δd や $\Delta \lambda$ は干渉フリンジの振幅を小さくするように働いていることがわかる。それゆえ、干渉フリンジの振幅 a に対する膜厚の不均一度 Δd や波長の不均一度 $\Delta \lambda$ の依存性は、次のような置き換で表現することができる。

$$a \rightarrow a \left(1 - \frac{8\pi^2 n_s^2}{\lambda^2} \Delta d^2 - \frac{8\pi^2 n_s^2 d^2}{\lambda^4} \Delta \lambda^2 \right) \quad (86)$$

この結果からわかる通り、干渉スペクトルのフリンジの強度は、膜の不均一度や分解能が影響して短波長側で急激に弱くなることがわかる。特に分解能は波

長の逆数の4乗で関係するので、短波長側でフリンジの強度に大きな影響を与える。

ここまでの結果を実際の干渉スペクトルの測定の場合に適用してみよう。薄膜の膜厚および屈折率を、それぞれ、 $d=2.5\mu\text{m}$ および $n_s=1.34$ とし、装置の分解能を $\Delta\lambda=2\text{nm}$ とすると、フリンジの振幅 a は、(86)の関係を用いると、 $\lambda=900\text{nm}$ のとき 1%、 $\lambda=450\text{nm}$ のとき 9% 減少することが計算から示される。また、膜の均一度を、 $\Delta d=0.01\mu\text{m}$ とすると、フリンジの振幅 a は、 $\lambda=900\text{nm}$ のとき 2%、 $\lambda=450\text{nm}$ のとき 7% 減少することが計算から示される。この結果は、後で詳しく議論するが、実測スペクトルと比較して妥当なものであることがわかる。

また、(86)の関係を用いると、膜厚の不均一度 Δd が $0.05\mu\text{m}$ よりも大きくなるとフリンジが消えることを示すことができる。別の論文(松村・塩野、投稿中)で、しゃぼん玉ができた直後や、時間が十分経過してしゃぼん玉膜が薄くなったときに、光源の光が強く当たるポイントで反射光の干渉スペクトルのフリンジが消えたことを報告したが、その原因は膜の表面にできた $0.05\mu\text{m}$ 程度の不均一な凸凹であることが予想できる。

ここではこれ以上議論しないが、屈折率が大きな膜の場合は膜の中で起きる多重反射の影響も干渉スペクトルに現れてくる。多重反射についての取り扱いは、エタロン (etalon) に対するものと同じ扱いになるので数式が複雑になる。

実測スペクトルによる干渉スペクトルの理論式の検証

前の章では、しゃぼん玉やセッケン膜の干渉スペクトルの測定実験に対するいくつかの理論式を導出した。この章では、それらの理論式を実測スペクトルと比較することで、これまでの議論の妥当性を検証する。

図4に、しゃぼん玉の透過光の干渉スペクトルの測定結果とシミュレーションスペクトルを示す。黒の実線がしゃぼん玉の透過光に対する実測の干渉スペクトルで、橙の実線が色々な近似レベルのシミュレーションスペクトルである。実測スペクトルの測定方法および測定条件は別の論文(松村・塩野、投稿中)に記載した方法を踏襲した。

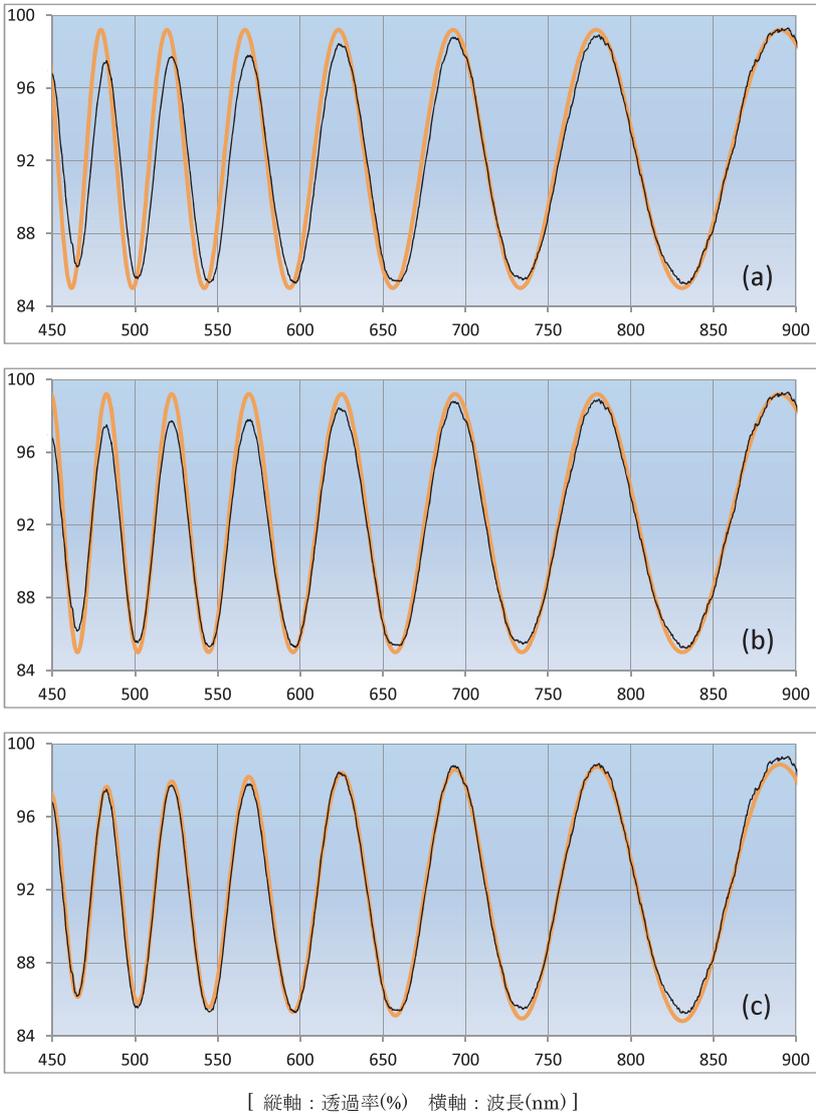


図4 実測スペクトル(黒色実線)とシミュレーションスペクトル(橙色実線)：
 (a) 膜厚のみを考慮した単純なシミュレーション
 (b) 屈折率の波長依存性を考慮したシミュレーション
 (c) 分解能、膜の均一度、屈折率の波長依存性を考慮したシミュレーション

図4-aには、(65)式をもとにして、 a_r , b_r , および膜厚 d を長波長側でフィットさせたシミュレーションスペクトルを示す。短波長側でフリンジの周期と強度が、実測スペクトルからずれていることがわかる。

フリンジの周期のずれは、屈折率の波長依存性を考慮すると解消できる。一般に、物質の屈折率は短波長になるにつれて大きくなり、その変化のようすはコーシー (Cauchy) の分散公式やセルマイヤー (Sellmeier) の分散公式で再現できる。しゃぼん玉の干渉スペクトルの解析においては、実測スペクトルへのフィッティングを容易にするためにこれらの分散公式の最初の2項を考慮した次式を用いた。

$$n_s = n_{s0} \left(1 + \frac{A_s}{\lambda^2} \right) \quad (87)$$

ここで、 n_{s0} と A_s は屈折率に関係した物質固有の定数である。膜厚の決定精度は、(87)式の補正を行う前は $\pm 0.006\mu\text{m}$ であるが、補正後は精度が $\pm 0.002\mu\text{m}$ まで、場合によっては $\pm 0.001\mu\text{m}$ まで上がる。図4-bには、(87)式を考慮してフィッティングしたシミュレーションスペクトルを示す。このとき、しゃぼん玉の膜厚 d は、 $2.335\mu\text{m}$ となった。ここで、 n_{s0} の値として1.331を用い、 A_s として $0.0024\mu\text{m}^2$ を用いた (松村・塩野, 2013, 投稿中)。図4-bのシミュレーションスペクトルは実測スペクトルに比べて、フリンジの周期は良く再現しているが、強度が短波長側でずれていることがわかる。

図4-cには、(87)式だけでなく、(86)の関係も考慮したシミュレーションスペクトルを示す。このとき用いたパラメータは、 $a_{12}=7.2\%$, $b_{12}=91.9\%$, $\Delta\lambda=2.3\text{nm}$, $\Delta d=0.015\mu\text{m}$ であるが、シミュレーションスペクトルは実測スペクトルをフリンジの強度も含めて、良く再現していることがわかる。実測スペクトルは、分解能2.1nmの分光器 (Ocean Optics 製 USB2000+XR1-ES) を用いて測定したが、スムージングを8に設定したことにより、実効分解能が下がったので、 $\Delta\lambda=2.3\text{nm}$ は妥当な値であるといえる。また、図4と同時に測定した反射光の干渉スペクトルの膜厚 d は $2.317\mu\text{m}$ となり、透過光の干渉スペクトルの場合に比べて $0.018\mu\text{m}$ 小さな値になったので、 $\Delta d=0.015\mu\text{m}$ も妥当な値であるといえる。一方、図3-dにおいて、屈折率が1.34のとき

のパラメータの値は、 $a_{12}=7.8\%$ 、 $b_{12}=92.0\%$ となるが、これらの値も図4-cをフィッティングしたときのパラメータの値と良く一致している。このように、しゃぼん玉の透過光の干渉スペクトルの測定結果は、本稿の理論が正しいことを示している。

一方、反射光の干渉スペクトルの場合は、相対的な反射率しか測定できないので、詳細な議論はできていない。しかし、図3-bにおいて、屈折率が1.34のときの干渉フリッジの振幅は、 $a_r=4.1\%$ と透過光の場合の約半分の大さきになるが、この結果は、別の論文（松村・塩野，2013，投稿中）に掲載した実測スペクトルの強度と矛盾していないので、妥当なものといえる。

おわりに

本稿では、しゃぼん玉やセッケン膜の干渉スペクトルに対する理論的な考察を行い、実測スペクトルを細部まで再現する理論式を導出した。

しゃぼん玉などの薄膜の干渉に関しては、高校物理のいくつかの教科書に詳しい解説が出ている。その中で、数研出版の物理の教科書（國友正和ほか10名，2013：187-191）においては、「光の干渉と回折」の単元の中の「薄膜による光の干渉」，「くさび形空気層における光の干渉」，および「ニュートンリング」の項目の中で、屈折率が大きい媒質から小さい媒質へ入射するときの反射は、自由端での反射に相当するので、位相は変化しないが、屈折率が小さい媒質から大きい媒質へ入射するときの反射は、固定端での反射に相当するので、位相が π だけ（半波長分）変化することを述べて、干渉の条件式を解説している。また、「薄膜による光の干渉」の項目では、しゃぼん玉の干渉のことを取り上げ、しゃぼん玉の表面が虹色に色づく理由を干渉の条件式を示したあとで本文と脚注で詳しく解説している（國友正和ほか10名，2013：187-188）。しかし、こうした解説に対して、教科書では具体的な実験結果が示されていない。先の論文（松村・塩野，2012，2013，投稿中）では、しゃぼん玉の干渉スペクトルの測定法を提示し、その測定により、高校物理の教科書にある干渉の条件式を使って、しゃぼん玉の膜厚が決定できることを示した。

本稿では、しゃぼん玉やセッケン膜の干渉スペクトルの測定と解析に関する

理論的な背景を、実験条件と実測スペクトルの関係まで含めて詳細に解説した。特に、理論式の導出過程をくど過ぎるくらい細部まで記述したのは、教育現場の担当者に、本稿の数式を確認してもらうことで、しゃぼん玉の干渉実験が理論的なバックボーンを持っていることを伝えなかったからである。

しゃぼん玉は、身近な生活の場で見られ、その姿形の美しさから多くの人を惹きつける魅力的な観察対象である。このしゃぼん玉を干渉実験で教材化することは、理科への関心を高めることにつながるので重要であると考えられる。それゆえ、本稿が教育現場でしゃぼん玉の干渉実験の教材化のために役立てば幸いである。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 23501037 の助成を受けて行ったものである。

参考文献

- 國友正和ほか 10 名：物理（平成 24 年 3 月検定済），数研出版，2013。
- 松村敬治・塩野正明：分光測定の高速度によるシャボン玉の膜厚の測定法の確立，西南学院大学人間科学論集，8(1)，27-43，2012。
- 松村敬治・塩野正明：シャボン玉の反射光と透過光の分光測定による膜厚の決定，西南学院大学人間科学論集，8(2)，215-228，2013。
- 松村敬治・塩野正明：しゃぼん玉の薄膜の可視分光による干渉実験—反射光と透過光の干渉スペクトルの同時測定—，科学教育研究，投稿中。
- 谷田貝豊彦：例題で学ぶ光学入門，森北出版，2010。

西南学院大学人間科学部児童教育学科