

# 世代別失業率と資本蓄積

三宅伸治 \*

## 概要

異なる世代の失業を明示的に扱うことのできる経済モデルを構築し、若年世代の失業率と壮年世代の失業率が、資本蓄積とともにどのように推移するかを分析した。定常均衡の存在条件を示し、特定のパラメータのもとで、資本蓄積に伴い若年世代および壮年世代の失業率がともに低下していくこと、両者の失業率が逆転しうることの数值例によって示した。労働を供給しない老年世代をモデルに含めることにより、その世代を含めない場合に見られる過少貯蓄の問題を回避することが可能となった。

## 1 イントロダクション

若年失業の問題は広く知られている。若年世代の失業率が他の世代の失業率よりも高いことは多くの国に共通する特徴である。若年失業は、所得分配の問題だけでなく、人的資本蓄積の障害を通じ経済成長とも関連があると考えられ、将来の雇用問題や GDP へ与える影響が懸念される。このような状況のもとでは、若年失業と経済成長の関係を分析することは自然な流れのように思えるが、そのためには、労働者の世代を明示的に区別した経済成長モデルが必要となる。しかしながら、そのような経済モデルは、筆者の知る限り、それほど多くない。

近年、失業を含む世代重複モデルが様々な分野に応用されるようになった。例えば Bean and Pissarides (1993) は失業と経済成長の関係、Ono (2010) は年金と経済成長の問題、Yakita (2014) は財政赤字の持続可能性の問題、Azariadis and Pissarides (2007) および Hiraguchi (2011) は国際資本移動の問題を世代重複モデルによって分析している。しかしながら、このようなモデルは、労働する世代を区別しない。すなわち、若年期に労働を供給するのみで、翌期は引退するという設定になっている。複数の世代が労働を供給するモデルとしては、Modesto (2008) や Gorry (2013) があるが、資本蓄積も同時に分析する目的には適していない。

---

\*E-mail: smiyake@seinan-gu.ac.jp

三宅 (2010) では、若年の労働者と壮年 (2 期目) の労働者を明示的に分けて失業と資本蓄積の関係を描写しようとした。しかしながら、三宅 (2010) にはモデル内で資本蓄積が生じにくいという問題があった。これは分析を簡単化するため、引退世代を捨象、すなわち、存在する 2 世代ともに労働を供給すると仮定したことが原因であった。この仮定は二つの経路から経済全体の資本蓄積を阻害する。一つは、壮年期にも所得を受け取るため若年期に貯蓄が少なくてもすむことである。もう一つは、壮年期の翌期は存在しないため、壮年期にも貯蓄をする誘引がないことである。このような理由から、経済全体として貯蓄が増えず資本蓄積が進まなかった。そこで、貯蓄を発生させるために、壮年期の所得が著しく少なくなる、あるいは、壮年世代の失業率が高くなるようなパラメータを設定した。三宅 (2010) は異なる世代の失業率が変化していく様子を分析可能であるという利点はあるものの、現実的な政策的含意を得るためには、この問題点を改善する必要がある。

本稿のモデルの特徴は、(1) 引退し労働を供給しない世代 (老年世代)、および、(2) 外部性として学習効果 (Learning by Doing) を導入したことである。(1) は、前述の通り資本蓄積を促進させる効果を持つ。引退前の世代は貯蓄をすることになり、経済全体の貯蓄水準を引き上げるからである。しかしながら、(1) の設定により動学的性質は均衡経路は 3 階差分方程式として描写されることになる。そこで (2) の仮定により、均衡経路を 2 階差分方程式に簡単化することが可能になった。(2) の設定は内生的成長を生む源泉となることが多いが、本稿の設定のもとでは内生的成長は発生せず、定常状態へと収束していく。また、一定の条件のもとで、定常均衡が少なくとも一つ存在する条件を示した。さらに、定常均衡が安定的であることを数値例によって示し、その過程で、両世代の失業率が推移していく状況を示した。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節でモデルの設定を述べる。第 3 節で競争均衡を描写し、数値例により定常均衡の存在およびその安定性について分析する。第 4 節はまとめである。

## 2 モデル

### 2.1 人口構造

離散時間で描写される 3 世代重複モデルを考える。人々は 3 期間確実に生存し、それぞれの期を若年期、壮年期、老年期とよぶ。 $t$  期に生まれる人々を世代

$t$  とよぶ.  $t$  期に若年である世代の人口を  $N_t^1$  で表す.  $t$  期の壮年人口を  $N_t^2$ ,  $t$  期の老年人口を  $N_t^3$  で表す. すなわち, 右下の添字は期を, 右上の添字は年代を表し,  $j=1, 2, 3$  はそれぞれ若年, 壮年, 老年を指す<sup>1</sup>. 各世代の人口は定数  $n \in (-1, 1)$  の割合で増加すると仮定する. したがって,

$$N_t^j = (1+n)N_{t-1}^j \quad (1)$$

である. 老年期は引退し働かないと仮定するので,  $t$  期の労働力人口を  $N_t \equiv N_t^1 + N_t^2$  で定義すると簡単な計算により

$$N_t = \left( \frac{2+n}{1+n} \right) N_t^1 = (2+n)N_t^2 \quad (2)$$

および  $\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1+n$  を得る. 本稿の設定では, 人々は3期間確実に生存するという仮定により, 少子高齢化と人口減少は同一の現象となる.

## 2.2 個人

個人の行動を描写する. 遺産動機の無い3期間生存する個人は, 若年期と壮年期に労働を非弾力的に供給しようとする. 老年期は引退し, 若年期と壮年期に貯蓄したものを消費する. 各期, 個人の努力とは無関係に一定の確率で就職できるか, それとも, 失業するかが確定する. その確率は, 個人にとっては所与であるが, モデル全体としては内生的に決まる.

本モデルにおける個人による最適化行動の特徴を述べる. 個人は各期自分が就業したかどうかを認識した後, 消費計画を立てる. 若年期には生涯の消費計画を, 壮年期には, 就業状態を認識後, それ以降の消費計画を立てる<sup>2</sup>. 若年期において, 壮年期に就職できるかどうか不確実である. また, 老年期は引退するため正の貯蓄を残す必要がある<sup>3</sup>.

世代  $t$  期の個人が解く最大化問題を描写する. この個人の消費を  $(c_t^1, c_{t+1}^2, c_{t+2}^3)$  と置く. 右下の添字が期を, 右上の添字は  $j=1, 2, 3$ , それぞれ, 若年期, 壮年期, 老年期を表す. この個人は若年期, 壮年期それぞれ収入  $y_t^1, y_{t+1}^2$  を得て, 若

<sup>1</sup> この表記の約束と, 人々は3期間確実に生存するという仮定から,  $t$  期の若年個人は,  $t+1$  期に壮年に,  $t+2$  期に老年になる. したがって, 例えば  $N_t^1 = N_{t+1}^2 = N_{t+2}^3$  が成立する.

<sup>2</sup> 後で見るようにバックワードに問題を解き, 状態条件付き消費が解となる.

<sup>3</sup> 壮年期に貯蓄に関する意思決定をすることが三宅 (2010) および三宅 (2014) との大きな相違点である. これらの研究では, 2 世代が労働を供給するが, 老年世代をモデルから捨象したため, 壮年期に貯蓄する必要がなかった. すなわち, 個人の最適化行動は, 実際には, 若年期の貯蓄決定のみであり, 壮年期の貯蓄決定は存在しなかった.

年期, 壮年期にそれぞれ  $s_t^1, s_{t+1}^2$  だけの貯蓄を行う.  $t$  期における世代  $t$  の若年個人の予算制約は次のようになる.

$$c_t^1 = y_t^1 - s_t^1 \quad (3)$$

$$c_{t+1}^2 = (1 + r_{t+1})s_t^1 + y_{t+1}^2 - s_{t+1}^2 \quad (4)$$

$$c_{t+2}^3 = (1 + r_{t+2})s_{t+1}^2. \quad (5)$$

ここで  $r_{t+1}$  は  $t$  期の貯蓄に対する利子率である.

世代  $t$  の個人は,  $t$  期に一定確率で仕事を, 一定確率で失業するため, 収入は確率変数として表される.

$$y_t^1 = \begin{cases} (1 - \tau_t)w_t^1 & m_t^1 \\ b_t^1 & 1 - m_t^1 \end{cases} \quad (6)$$

$$y_{t+1}^2 = \begin{cases} (1 - \tau_{t+1})w_{t+1}^2 & m_{t+1}^2 \\ b_{t+1}^2 & 1 - m_{t+1}^2 \end{cases} \quad (7)$$

ただし,  $m_t^j$  は  $t$  期に  $j$  の個人の就業確率で  $0 < m_t^j < 1$  を満たす.  $w_t^j$  は  $t$  期に  $j$  の個人が働いて得る賃金,  $\tau_t$  は  $t$  期の所得税率,  $b_t^j$  は,  $t$  期の  $j$  の個人に支払われる失業給付である.  $\tau_t$  に若年, 壮年を示す添字  $j$  が無い理由は, これらが世代間共通の値をとると仮定するからである.

$y_{t+1}^2$  が確率変数のため, (4), (5) から  $c_v^j$  ( $v = t+1, t+2, j = 2, 3$ ) も確率変数となる. これらの予算制約のもと, 期待効用

$$u(c_t^1) + \frac{1}{1 + \rho} \mathbb{E} \left[ u(c_{t+1}^2) + \frac{1}{1 + \rho} u(c_{t+2}^3) \right] \quad (8)$$

を最大化する.  $\rho$  は定数の時間選好率である. ただし, 前述の通り, 若年期に仕事を, 得たかどうか判明した後で最適化問題を解くと仮定しているため, 若年期の雇用に不確実性は存在せず, 期待値は壮年期以降の  $u(\cdot)$  にかかっている.  $u(c_v^j)$  は  $c_v^j$  に関して二次関数

$$u(c_v^j) = A c_v^j - \frac{1}{2} B c_v^{j2} \quad (9)$$

を仮定する.  $A, B$  は定数である.

壮年期にも意思決定するため, これをバックワードに解く必要がある. いま壮年期に, いるとしよう. 意思決定の段階では仕事を, 得たか失業したかわかっている, ここではまず就業していることがわかっていると, する. 壮年期において就業したときの最大化問題は次のようになる.

$$\max_{c_{t+1}^2, c_{t+2}^3} u(c_{t+1}^2) + \frac{1}{1+\rho} u(c_{t+2}^3)$$

s.t. (4), (5), (9)

壮年期の意思決定に不確実性は存在しないことに注意しよう。一階の条件を整理すると、 $t+1$  期に就業した場合の貯蓄関数,  $\bar{s}_{t+1}^2$  が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{s}_{t+1}^2(s_t^1) &= \left[ \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \left( \frac{r_{t+1} - \rho}{1 + \rho} \right) + (1 - \tau_{t+1})w_{t+1}^2 + (1 + r_{t+1})s_t^1 \right] \\ &\quad \times \frac{1 + \rho}{1 + \rho + (1 + r_{t+2})^2} \end{aligned} \quad (10)$$

同様に、 $t+1$  期に失業していたとすると、壮年期の貯蓄関数は次のようになる。

$$\underline{s}_{t+1}^2(s_t^1) = \left[ \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \left( \frac{r_{t+1} - \rho}{1 + \rho} \right) + b_{t+1}^2 + (1 + r_{t+1})s_t^1 \right] \frac{1 + \rho}{1 + \rho + (1 + r_{t+2})^2} \quad (11)$$

$t+1$  期において、 $s_t$  は過去に実現した値であるから、この個人にとっては所与である。これを明示するため、それぞれ  $\bar{s}_{t+1}^2(s_t^1)$ ,  $\underline{s}_{t+1}^2(s_t^1)$  とした。

$t$  期に戻ろう。世代  $t$  の若年個人は、翌期に  $m_{t+1}^2$  の確率で就業する。就業した場合の壮年以降の効用和は、

$$\bar{U}(s_t^1) \equiv u(\bar{c}_{t+1}^2(s_t^1)) + \frac{1}{1+\rho} u(\bar{c}_{t+2}^3(s_t^1)) \quad (12)$$

である。ただし、

$$\bar{c}_{t+1}^2(s_t^1) \equiv (1 + r_{t+1})s_t^1 + (1 - \tau_{t+1})w_{t+1}^2 - \bar{s}_{t+1}^2(s_t^1) \quad (13)$$

$$\bar{c}_{t+2}^3(s_t^1) \equiv (1 + r_{t+2})\bar{s}_{t+1}^2(s_t^1) \quad (14)$$

である。同様に、この個人は、 $1 - m_{t+1}^2$  の確率で失業する。失業した場合の壮年期以降の効用和は、

$$\underline{U}(s_t^1) \equiv u(\underline{c}_{t+1}^2(s_t^1)) + \frac{1}{1+\rho} u(\underline{c}_{t+2}^3(s_t^1)) \quad (15)$$

である。ただし、

$$\underline{c}_{t+1}^2(s_t^1) \equiv (1 + r_{t+1})s_t^1 + b_{t+1}^2 - \underline{s}_{t+1}^2(s_t^1) \quad (16)$$

$$\underline{c}_{t+2}^3(s_t^1) \equiv (1 + r_{t+2})\underline{s}_{t+1}^2(s_t^1) \quad (17)$$

である。以上から、目的関数 (8) は  $m_{t+1}^2$  を所与として次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \max_{s_t^1} \quad & u(y_t^1 - s_t^1) + m_{t+1}^2 \bar{U}(s_t^1) + (1 - m_{t+1}^2) \underline{U}(s_t^1) \quad (18) \\ \text{s.t.} \quad & (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17) \end{aligned}$$

$t$  期に就業か失業か判明した後に意思決定するため、(18)において、 $y_t^1$  は、 $(1 - \tau_t)w_t^1$  または  $b_t$  の値になっていることに注意しよう。この問題の一階条件を整理すると、若年個人の最適貯蓄、 $s_t^{1*}$ 、および壮年個人の最適貯蓄  $s_{t+1}^{2*}$ 、が次のように導出される<sup>4</sup>。

$$s_t^{1*\nu_1} = \Gamma_1 [\nu_1(1 - \tau_t)w_t^1 + (1 - \nu_1)b_t^1] - \Gamma_2 \mathbb{E}(y_{t+1}^2) - \Gamma_3 \quad (19)$$

$$s_{t+1}^{2*\nu_1, \nu_2} = \Gamma_4 [\nu_2(1 - \tau_{t+1})w_{t+1}^2 + (1 - \nu_2)b_{t+1}^2] + \Gamma_5 s_t^{1*\nu_1} + \Gamma_6 \quad (20)$$

ただし、 $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) は、就業状態であれば 1、失業状態であれば 0 をとる変数である<sup>5</sup>。また

$$\mathbb{E}(y_{t+1}^2) = m_{t+1}^2(1 - \tau_{t+1})w_{t+1}^2 + (1 - m_{t+1}^2)b_{t+1}^2 \quad (21)$$

$$\Gamma_1 = \Lambda_1^{-1}, \quad \Gamma_2 = \Lambda_2 \Lambda_1^{-1}, \quad \Gamma_3 = \Lambda_3 \Lambda_1^{-1}$$

$$\Gamma_4 = \Lambda_4, \quad \Gamma_5 = \Lambda_4 \Lambda_6, \quad \Gamma_6 = \Lambda_4 \Lambda_5$$

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{(1 + r_{t+1})^2}{1 + \rho} - \frac{(1 + r_{t+1})^2}{1 + \rho + (1 + r_{t+2})^2} \quad (22)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho} - \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho + (1 + r_{t+2})^2} \quad (23)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \left[ 1 - \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho} - \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho + (1 + r_{t+2})^2} \left( \frac{r_{t+2} - \rho}{1 + \rho} \right) \right] \quad (24)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1 + \rho}{1 + \rho + (1 + r_{t+1})^2} \quad (25)$$

$$\Lambda_5 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \left( \frac{r_{t+1} - \rho}{1 + \rho} \right) \quad (26)$$

$$\Lambda_6 = 1 + r_t \quad (27)$$

ここで、(19) および (20) は、4 タイプの個人の最適貯蓄を表現していることに注意しよう。すなわち、若年期と壮年期における  $\nu_j$  の組み合わせにより、(イ)

<sup>4</sup>包絡線定理を使用すればよい。

<sup>5</sup>Yakita (2014) の表記に倣った。

( $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$ ) 若年期就業, 壮年期就業, (口) ( $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$ ) 若年期就業, 壮年期失業, (ハ) ( $\nu_1 = 0, \nu_2 = 1$ ) 若年期失業, 壮年期就業, (ニ) ( $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$ ) 若年期失業, 壮年期失業, である<sup>6</sup>.

## 2.3 労働市場

### 2.3.1 労働市場の摩擦

労働市場の設定は三宅 (2010) および三宅 (2014) を踏襲する. 労働市場の摩擦をマッチング関数で表現する. この経済には世代が異なる二種類の個人に対し, それぞれの労働市場が形成されていると考える. すなわち, マッチング関数は 2 種類ある.

### 2.3.2 交渉による賃金交渉

交渉賃金としてナッシュ交渉解を考える. 企業は, 賃金について, 若年個人および壮年個人, それぞれの世代と別々に交渉する. 賃金交渉時における各世代の個人の外部オプションは,  $t$  期において交渉が決裂し失業した場合の失業給付  $b_t^j$  であると仮定する. 失業給付額は, 賃金率に世代とは独立な一定の割合  $\eta \in (0, 1)$  を乗じたものであるとする<sup>7</sup>.

$$b_t^j = \eta w_t^j \quad (28)$$

本論では, この  $\eta$  を政策パラメータとして扱う. ただし, 交渉当事者は,  $b_t^j$  を所与として交渉する. 企業にとっての外部オプションはそれぞれの労働者に支払う賃金率  $\hat{w}_t^j$  である. したがって, 交渉賃金は次のように定式化できる.

$$w_t^j \equiv \arg \max_{\hat{w}_t^j} \left( \hat{w}_t^j - b_t^j \right)^\delta \left( F_{L_t^j} - \hat{w}_t^j \right)^{1-\delta}$$

<sup>6</sup>例えば, 若年期に就業し, 壮年期に失業した場合の貯蓄は,  $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$  だから,

$$\begin{aligned} s_t^{1*1} &= \Gamma_1(1 - \tau_t)w_t^1 - \Gamma_2\mathbb{E}(y_{t+1}^2) - \Gamma_3 \\ s_{t+1}^{2*1,0} &= \Gamma_4 b_{t+1}^2 + \Gamma_5 s_t^{1*1} + \Gamma_6 \end{aligned}$$

と表すことができる.

<sup>7</sup>厳密に言えば, 三宅 (2010) および三宅 (2014) では, 失業給付は賃金ではなく, 労働の限界生産性に比例すると仮定したので, 本稿の設定とは異なる.

ここで、 $F_{L_t^j}$  は労働の限界生産性、 $\delta$  は個人の交渉力を表すパラメータである<sup>8</sup>。また、両者とも労働の限界生産性および失業給付を所与として交渉すると仮定する。以上から、 $w_t^j$  および  $b_t^j$  を所与として問題を解くと、交渉賃金として次を得る。

$$w_t^j = \delta F_{L_t^j} + (1 - \delta)b_t^j \quad (29)$$

交渉賃金は、労働の限界生産性および失業給付を両者の交渉力による加重和として表される。労働者の交渉力  $\delta$  が大きければ、交渉賃金は、競争的な賃金率に近づき、反対に、企業の交渉力  $1 - \delta$  が大きければ、失業給付水準に近づくことになる。

## 2.4 企業

生産技術は三宅 (2010) および三宅 (2014) と基本的に同様である。ただし、新たに Ono(2001) に倣い学習効果による外部性を導入する<sup>9</sup>。 $t$  期の生産物は、 $t$  期に利用可能な物的資本ストック  $K_t$ 、世代  $t$  の若年個人が供給する労働  $L_t^1$ 、世代  $t - 1$  の壮年個人が供給する労働  $L_t^2$  を投入することによって得られる。生産技術は次のような生産関数であるとする。

$$F(K_t, L_t^1, L_t^2) = A_t K_t^\alpha \left( L_t^{1\beta} L_t^{2(1-\beta)} \right)^{1-\alpha} \quad (30)$$

$\beta$  は、この労働サービスの生産性に関連したパラメータ、 $\alpha$  は物的資本ストックの生産性に関連したパラメータである。資本減耗率は 0 と仮定する。また、全要素生産性を

$$A_t = AK_t^{1-\alpha} \left( L_t^{1\beta} L_t^{2(1-\beta)} \right)^{\alpha-1} \quad (31)$$

と仮定する。 $A$  は技術水準を表す定数である。

企業は、若年または壮年の個人を雇用するに先立ち、求人をしてしなければならない<sup>10</sup>。これには、求人広告、物理的あるいは制度的な社内の受け入れ体制の整備等、様々なコストが含まれる。つまり、企業は、物的資本ストック、若年個人および壮年個人に対する報酬への支払に加えて、労働者を雇用する際に求人

<sup>8</sup> これまでと同様  $j = 1, 2$  は、それぞれ、若年、壮年を表す。

<sup>9</sup> Ono(2001) でも見られるように、学習効果の仮定は内生的成長を導くために使用される。しかしながら、本稿の設定ではこの仮定を用いても内生的成長は生じない。本稿でこの仮定を採用したのは、次節で見るように、経済の動学経路を単純化するためである。世代重複モデルの内生的経済成長モデルについては Jones and Manuelli (1992) が詳しい。

<sup>10</sup> 欠員とよばれることもある。



に要するコストを負担しなければならない。世代  $t$  の若年個人に対する求人数  $J_t^1$  には、一単位あたり  $q_t^1$ 、世代  $t-1$  の壮年個人に対する求人数  $J_t^2$  には、一単位あたり  $q_t^2$  のコストがかかる。また、企業は  $q_t^j$  を所与として行動すると仮定する。求人のコストが世代によって異なると仮定した理由は、雇用する労働者の質が異なれば、求人広告の方法、雇用した労働者に使用させる設備・制度など社内での処遇も異なるため、その準備費用も異なると考えられるからである<sup>11</sup>。分析の簡単のため、求人1単位あたりにかかるコスト  $q_t^j$  がその労働者の限界生産性に比例すること、すなわち、

$$q_t^j = \mu_j F_{L_t^j} \quad (j = 1, 2) \quad (32)$$

を仮定する。 $F_{L_t^j}$  は、 $F$  の  $L_t^j$  についての偏導関数、 $\mu_j$  は定数である。

次に、雇用の成立過程を描写する。求人数は必ずしも雇用者数と一致するわけではない。広く知られているように、地理的要因、企業側の要求する労働者の質と実際の労働者の質との相違等、労働市場の様々な摩擦により、求職者の一部のみが雇用される。このような摩擦をマッチング関数、

$$L_t^j = M_t^j \left( N_t^j, J_t^j, k_t \right) \quad (33)$$

によって表現する<sup>12</sup>。 $L_t^j$  は世代  $t$  の若年または壮年の雇用者数、 $N_t^j$  は世代  $t$  の若年または壮年の人口、 $k_t$  は  $t$  期の労働力人口一人あたり資本ストック資本ストックを表す<sup>13</sup>。

以下では、分析の簡単化のため、(33) について具体的に次のような関数型を仮定する。

$$M_t^j \left( N_t^j, J_t^j, k_t \right) = \phi_j (N_t^j)^{1-\lambda_j} (J_t^j)^{\lambda_j} k_t^{\gamma_j} \quad (34)$$

$\phi_j$  は雇用のマッチングに関する規模パラメータ、 $\lambda_j$  は、求人数が雇用成立に影響する程度を表すパラメータ、 $\gamma_j$  は、一人あたり資本ストックが雇用成立に影響する程度を表すパラメータである。 $N_t^j$  と  $J_t^j$  に関しては一次同次であることに注意しよう。

<sup>11</sup>例えば、アルバイトの求人広告にかかるコストと、管理職をヘッドハンティングするときにかかるコストでは、後者の方が高額になるであろう。

<sup>12</sup>マッチング関数については Petrongolo and Pissarides (2001) が詳しい。

<sup>13</sup>本稿では分析しないが、次のような区別が可能である。本モデルでは失業が存在するため、雇用者一人あたりの変数と、労働力人口一人あたりの変数は異なる。更に、引退した老年も存在するので、総人口一人あたりの変数とも異なる。

(34) 式を次のように変形する.

$$J_t^j = \phi_j^{-\frac{1}{\lambda_j}} (N_t^j)^{-\frac{1-\lambda_j}{\lambda_j}} k_t^{-\frac{\gamma_j}{\lambda_j}} (L_t^j)^{\frac{1}{\lambda_j}} \quad (35)$$

これは企業が、労働供給  $N_t^j$  を所与として雇用者数  $L_t^j$  を決めると、求人数  $J_t^j$  が確定することを意味する.

企業の利潤最大化問題を描写する.  $t$  期における企業の利潤最大化問題は  $\Pi_t$  を利潤として、次のように表せる.

$$\begin{aligned} \max_{L_t^1, L_t^2, K_t} \quad & \Pi_t \\ \text{s.t.} \quad & r_t \text{ は所与} \end{aligned} \quad (36)$$

ただし、

$$\Pi_t = F(K_t, L_t^1, L_t^2) - w_t^1 L_t^1 - w_t^2 L_t^2 - r_t K_t \quad (37)$$

$$-q_t^1 J_t^1 - q_t^2 J_t^2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &= A_t K_t^\alpha \left( L_t^1{}^\beta L_t^2{}^{21-\beta} \right)^{1-\alpha} - w_t^1 L_t^1 - w_t^2 L_t^2 - r_t K_t \\ &\quad - q_t^1 \phi_1^{-\frac{1}{\lambda_1}} (N_t^1)^{-\frac{(1-\lambda_1)}{\lambda_1}} k_t^{-\frac{\gamma_1}{\lambda_1}} (L_t^1)^{\frac{1}{\lambda_1}} - q_t^2 \phi_2^{-\frac{1}{\lambda_2}} (N_t^2)^{-\frac{(1-\lambda_2)}{\lambda_2}} k_t^{-\frac{\gamma_2}{\lambda_2}} (L_t^2)^{\frac{1}{\lambda_2}} \end{aligned}$$

である.

一階条件は、 $q_t^j$  を所与として  $L_t^j$  および  $K_t$  で微分することによって導出されるが、三つの点に注意しよう. 一つ目は、競争的に決まる賃金と異なり、企業は交渉で賃金を決めるため、 $\Pi_t$  を  $L_t^j$  で微分する時、(29) 式を考慮に入れて労働投入を決めることである. より具体的に言うと、失業給付  $b_t^j$  は所与と考えるため、(29) 式第 1 項への影響を考える必要がある. 更に、 $w_t^j$  にも  $L_t^j$  が含まれていることに注意しよう. 二つ目は外部効果に関することである. この経済には二種類の外部性が存在する. 一つはマッチング関数の  $k_t$ 、もう一つは  $A_t$  である. 企業はこれらを所与として行動する. 三つ目は求人費用  $q_t^j$  に関することである.  $q_t^j$  は、それぞれの労働者の限界生産性に比例するため、均衡では企業の行動を反映するが、企業が最大化問題を解く段階では、 $q_t^j$  ( $= \mu_j F_{L_t^j}$ ) 自体を所与とすると仮定していることである.

以上に気をつけて  $L_t^j$ ,  $K_t$ , で微分すると、一階の条件は次のようになる<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>(39), (40), (41) 式は、それぞれ左側の変数に関する一階条件という意味である.

$$L_t^1 : \Omega = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \phi_1^{-\frac{1}{\lambda_1}} (N_t^1)^{-\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}} k_t^{-\frac{\gamma_1}{\lambda_1}} (L_t^1)^{\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}} \quad (39)$$

$$L_t^2 : \Omega = \frac{\mu_2}{\lambda_2} \phi_2^{-\frac{1}{\lambda_2}} (N_t^2)^{-\frac{1-\lambda_2}{\lambda_2}} k_t^{-\frac{\gamma_2}{\lambda_2}} (L_t^2)^{\frac{1-\lambda_2}{\lambda_2}} \quad (40)$$

$$K_t : r_t = A_t \alpha K_t^{\alpha-1} \left( L_t^{1\beta} L_t^{21-\beta} \right)^{1-\alpha} \quad (41)$$

ただし、

$$\Omega \equiv 1 - [\delta + (1 - \delta)\eta] - \delta[1 - \beta(1 - \alpha)] - \delta(1 - \beta)(1 - \alpha) \quad (42)$$

である。ここで、(39) 式、(40) 式を次のように変形する。

$$L_t^1 = \Psi_1 k_t^{\frac{\gamma_1}{1-\lambda_1}} N_t^1 \quad (43)$$

$$L_t^2 = \Psi_2 k_t^{\frac{\gamma_2}{1-\lambda_2}} N_t^2 \quad (44)$$

ただし、 $j = 1, 2$  に対し、

$$\Psi_j = \left( \lambda_j \mu_j^{-1} \phi_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \Omega \right)^{\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j}} \quad (45)$$

である。(43) および (44) 式は、若年および壮年個人への労働需要が、それぞれの世代人口に比例することを意味している。比例係数は、 $k_t$ 、 $\gamma_j$ 、 $\eta$ 、 $\mu_j$  等に依存することがわかる。 $\gamma_j > 0$  であれば、(43) および (44) より  $k_t$ 、 $\gamma_j$  の上昇は雇用量を改善することがわかる。 $\gamma_j > 0$  の場合、 $k_t$  の蓄積はマッチングを容易にするからである。 $\gamma_j$  が上昇しても同様の効果がある。反対に、 $\eta$  および  $\mu$  の増大は、雇用量を減少させる。失業給付を表す政策パラメータである。(29) および (42) より、 $\eta$  の上昇は交渉賃金を増大させるため、雇用量を減少させる。 $\mu_j$  の上昇は、求人コストの上昇を意味するので、(45) 式より雇用量を減少させる。

## 2.4.1 失業率

本節では、雇用率、 $m_t^j$  および失業率  $u_t^j$  を導出する。右下の添字は期を、 $j = 1, 2$  はそれぞれ若年、壮年を表す。まず、 $L_t^1$ 、 $L_t^2$  が雇用量と解釈できることを述べる。前節の導出過程より、(43)、(44) 式は  $N_t^1$ 、 $N_t^2$ 、 $k_t$ 、 $\phi_j$  が与えられたときの若年・壮年個人に対する労働需要であった。 $L_t^1$ 、 $L_t^2$  それぞれが労働供給  $N_{1,t}$ 、

$N_{2,t-1}$  を上回らない限り、その需要量に等しいだけの労働者が雇用されるため、 $L_{1,t}$ 、 $L_{2,t-1}$  は雇用量でもある<sup>15</sup>。したがって、雇用量 ( $m_t^j$ ) と失業率 ( $u_t^j$ ) について次の関係が得られる。

$$m_t^1(k_t) = \Psi_1 k_t^{\frac{\gamma_1}{1-\lambda_1}} \quad (46)$$

$$m_t^2(k_t) = \Psi_2 k_t^{\frac{\gamma_2}{1-\lambda_2}} \quad (47)$$

$$u_t^1(k_t) = 1 - m_t^1(k_t) \quad (48)$$

$$u_t^2(k_t) = 1 - m_t^2(k_t) \quad (49)$$

$\gamma = 0$  のとき、(39)、(40) より、失業率は一人あたり資本ストックに依存しない。(34) 式から、マッチング関数に一人あたり資本ストックを導入したことが、就業率や失業率が資本蓄積に依存する原因であることがわかる<sup>16</sup>。また、 $\gamma_j + \lambda_j < 1$  であれば、 $m_t^j'(k_t) > 0$ 、 $m_t^j''(k_t) < 0$  を示すのは容易である。したがって、同様の条件のもと、 $u_t^j(k_t)' < 0$ 、 $u_t^j(k_t)'' > 0$  の導出も容易である。

## 2.5 政府

本節では、政府の活動を描写する。政府は、就業した個人から税金を徴収し、失業者に失業手当を給付する。 $t$  期の税額は、 $j$  とは独立な  $\tau_t$  に賃金をかけたもの、すなわち、 $\tau_t w_t^j$  である。各期財政収支を均衡させる政府を考える<sup>17</sup>。財政収支の均衡は、

$$\tau_t (w_t^1 L_t^1 + w_t^2 L_t^2) = b_t^1 (N_t^1 - L_t^1) + b_t^2 (N_t^2 - L_t^2) \quad (50)$$

によって表される。左辺が税収、右辺が失業給付の総額である。本稿では、(28) を仮定するので、(50) を次のように書き換えることができる。

$$\tau_t (w_t^1 L_t^1 + w_t^2 L_t^2) = \eta [w_t^1 (N_t^1 - L_t^1) + w_t^2 (N_t^2 - L_t^2)] \quad (51)$$

本稿では、 $\eta$  が政策パラメータで、政府は (51) を満たすよう  $\tau$  を決めるとする。

<sup>15</sup>雇用量が決まれば (35) 式を通じて求人数も確定する。

<sup>16</sup>ただし、この時点では  $k_t$  は所与であり、 $k_t$  がどのように決まるかについては何も言及していないことに注意しよう。均衡における失業率の決定については次節以降で触れる。

<sup>17</sup>各期、世代間の移転は生じる。

### 3 競争均衡

本節では、競争均衡を描写し、限定的な形であるが、定常均衡の存在条件を示す。さらに、定常均衡が適当な数値例のもとで安定的となることを示す。最初に競争均衡を定義し、次いで、これまで導出した諸変数を労働力人口一人あたり資本ストック  $k_t$  の関数として表現する。これらを用いて競争均衡が2階差分方程式により描写できることを示す。

#### 3.1 定義

競争均衡を定義する。

**定義 3.1** 競争均衡とは、 $k_0$  および  $k_1$  を所与として、消費者の効用最大化条件、企業の利潤最大化条件、政府の予算制約、財市場の均衡条件を満たす、労働力人口一人あたり資本ストック、賃金率、利子率、若年および壮年失業率の流列である<sup>18</sup>。

#### 3.2 企業

交渉によって決まる賃金率、労働の限界生産性および利子率を  $k_t$  の関数として表す。まず、 $w_t^j$  を考える。(28) を (29) に代入し、 $w_t^j$  について解くと次を得る。

$$w_t^j = \tilde{\delta} F_{L_t^j} \quad (52)$$

ここで、

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{1 - (1 - \delta)\eta} \quad (53)$$

である。(52) が各世代の賃金率である。賃金率は、労働者の交渉力  $\delta$  と失業給付率  $\eta$  から構成される  $\tilde{\delta}$  を比例係数として労働の限界生産性に比例する<sup>19</sup>。労働の限界生産性は (2), (30), (31), (43), (44) より次のように表せる。

$$F_{L_t^1}(k_t) = \left( \frac{2+g}{1+n} \right) \beta \frac{(1-\alpha)A}{\Psi_1} k_t^{1-\frac{2}{1-\lambda_1}} \quad (54)$$

$$F_{L_t^2}(k_t) = (2+g)(1-\beta) \frac{(1-\alpha)A}{\Psi_2} k_t^{1-\frac{2}{1-\lambda_2}} \quad (55)$$

<sup>18</sup> この経済は2階差分方程式で記述されるため、初期値は二つ必要になる

<sup>19</sup>  $\eta = 0$  のとき、 $\tilde{\delta} = \delta$  である。 $\eta = 1$  のとき、 $\tilde{\delta} = 1$  である。また、明らかに  $\tilde{\delta}$  は  $\eta$  の増加関数で、 $\eta \in [0, 1]$  のとき、 $\tilde{\delta} \in [\delta, 1]$  である。

(52), (54), (55) から, 若年世代および壮年世代の賃金率を  $k_t$  の関数として表すことができた. これらを  $w_t^1(k_t)$ ,  $w_t^2(k_t)$  と表記する.

$$w_t^1(k_t) = \tilde{\delta} \left( \frac{2+g}{1+n} \right) \beta \frac{(1-\alpha)A}{\Psi_1} k_t^{1-\frac{\gamma_1}{1-\lambda_1}} \quad (56)$$

$$w_t^2(k_t) = \tilde{\delta}(2+g)(1-\beta) \frac{(1-\alpha)A}{\Psi_2} k_t^{1-\frac{\gamma_2}{1-\lambda_2}} \quad (57)$$

金利は, 仮定 (31) と (41) により簡単化され時間を通じて一定となる.

$$r_t = \alpha A \quad (58)$$

仮定  $\lambda^j + \gamma^j < 1$  から,  $w_t^j'(\cdot) > 0$  および  $w_t^j''(\cdot) < 0$  を示すことは容易である.

### 3.3 政府

税率を  $k_t$  の関数として表す. (51) に (56), (57) を代入し, (2), (43), (44) を用いて整理すると,

$$\tau(k_t) = \left( \frac{\beta}{\Psi_1} k_t^{-\frac{\gamma_1}{1-\lambda_1}} + \frac{(1-\beta)}{\Psi_2} k_t^{-\frac{\gamma_2}{1-\lambda_2}} - 1 \right) \eta \quad (59)$$

を得る.  $\tau'(\cdot) < 0$  および  $\tau''(\cdot) > 0$  を示すことは容易である.

### 3.4 家計

$\mathbb{E}(y_{t+1}^2)$  を  $k_{t+1}$  の関数として表そう. (21) に (28), (47), (57), (59) を代入することにより次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{t+1}^2)(k_{t+1}) &= m_{t+1}^2(k_{t+1}) (1 - \tau(k_{t+1})) w_{t+1}^2(k_{t+1}) \\ &\quad + (1 - m_{t+1}^2(k_{t+1})) \eta w_{t+1}^2(k_{t+1}) \end{aligned} \quad (60)$$

#### 3.4.1 貯蓄

貯蓄を労働人口一人あたり資本ストックの関数として表す. 最初に若年期の貯蓄関数を, 次に, 壮年期の貯蓄関数を導出する. 若年期の貯蓄を  $s_t^{1*\nu_1}$  とす

る。(19)に(28),(56),(60)を代入すると、次を得る。

$$s_t^{1*\nu_1}(k_{t+1}, k_t) = \Gamma_1 [\nu_1(1 - \tau(k_t))w_t^1(k_t) + (1 - \nu_1)\eta w_t^1(k_t)] - \Gamma_2 \mathbb{E}(y_{t+1}^2)(k_{t+1}) - \Gamma_3 \quad (61)$$

壮年期の貯蓄,  $s_{t+1}^{2*\nu_1, \nu_2}$  を  $k_{t+1}, k_t$  の関数として表す。(20)に(28),(57)を代入すると、

$$s_{t+1}^{2*\nu_1, \nu_2}(k_{t+1}, k_t) = \Gamma_4 [\nu_2(1 - \tau(k_{t+1}))w_{t+1}^2(k_{t+1}) + (1 - \nu_2)\eta w_{t+1}^2(k_{t+1})] + \Gamma_5 s_t^{1*\nu_1}(k_{t+1}, k_t) + \Gamma_6 \quad (62)$$

となる<sup>20</sup>。

### 3.4.2 貯蓄の集計

$t$ 期の貯蓄を集計し、 $t$ 期の貯蓄総額  $S_t$  を  $k_{t+1}, k_t, k_{t-1}$  の関数として導出する。2.2節で見た通り、この経済における貯蓄主体は、2タイプの若年個人と4タイプの壮年個人である。これらを集計する。

$$\begin{aligned} S_t(k_{t+1}, k_t, k_{t-1}) &= N_t^1 [m_t^1(k_t)s_t^{1*1}(k_{t+1}, k_t) + (1 - m_t^1(k_t))s_t^{1*0}(k_{t+1}, k_t)] \\ &\quad + N_t^2 [m_{t-1}^1(k_{t-1})m_t^2(k_t)s_t^{2*1,1}(k_t, k_{t-1}) \\ &\quad + m_{t-1}^1(k_{t-1})(1 - m_t^2(k_t))s_t^{2*1,0}(k_t, k_{t-1}) \\ &\quad + (1 - m_{t-1}^1(k_{t-1}))m_t^2(k_t)s_t^{2*0,1}(k_t, k_{t-1}) \\ &\quad + (1 - m_{t-1}^1(k_{t-1}))(1 - m_t^2(k_t))s_t^{2*0,0}(k_t, k_{t-1})] \end{aligned} \quad (63)$$

1行目は、世代  $t$  の若年個人の貯蓄で、第1項が職を得た個人、第2項が失業した個人の貯蓄である。2行目以降は、世代  $t-1$  の壮年の貯蓄である。2行目は

<sup>20</sup>例えば、若年期に失業し、壮年期に就職した場合の貯蓄は、 $\nu_1 = 0, \nu_2 = 1$  だから、

$$\begin{aligned} s_t^{1*0}(k_{t+1}, k_t) &= \Gamma_1 \eta w_t^1(k_t) - \Gamma_2 \mathbb{E}(y_{t+1}^2)(k_{t+1}) - \Gamma_3 \\ s_{t+1}^{2*0,1}(k_{t+1}, k_t) &= \Gamma_4 (1 - \tau(k_{t+1}))w_{t+1}^2(k_{t+1}) + \Gamma_5 s_t^{1*0}(k_{t+1}, k_t) + \Gamma_6 \end{aligned}$$

と表すことができる。

2.2 節のタイプ (イ) の個人の貯蓄である。3 行目はタイプ (ロ), 4 行目はタイプ (ハ), 5 行目はタイプ (ニ) の個人の貯蓄である。先に導出した壮年個人の貯蓄関数 (62), と (63) に含まれる壮年個人の貯蓄関数では, 時間を表す添字が異なることに注意しよう。(62) の  $s_{t+1}^{2*\nu_1, \nu_2}(k_{t+1}, k_t)$  は, 世代  $t$  の個人が  $t+1$  期に壮年になったときの貯蓄である。

$t$  期の集計された貯蓄  $S_t$  が 3 期間の労働力人口一人あたり資本ストック  $k_{t+1}, k_t, k_{t-1}$  に依存する理由を説明する。 $k_{t-1}$  が  $S_t$  に影響を与える理由は二つある。一つは世代  $t-1$  の壮年の貯蓄  $s_t^{2*\nu_1, \nu_2}$  は, 若年時の貯蓄  $s_{t-1}^{1*}$  に依存し,  $s_{t-1}^{1*}$  は賃金を通じ  $k_{t-1}$  に依存するからである。もう一つは, 貯蓄関数を集計するとき,  $m_{t-1}(k_{t-1})$  が用いられるからである。 $k_t$  が  $S_t$  に影響を与える理由も二つある。一つは, 若年個人の貯蓄も壮年個人の貯蓄も  $t$  期の賃金に依存するからである<sup>21</sup>。もう一つは, 貯蓄関数を集計するとき,  $m_t^j(k_t)$  が用いられるからである。最後に,  $k_{t+1}$  が  $S_t$  に影響を与える理由を述べる。世代  $t$  の若年個人の貯蓄は,  $t+1$  期に壮年になったときの期待所得  $\mathbb{E}(y_{t+1}^2)$  に依存する。 $\mathbb{E}(y_{t+1}^2)$  は  $k_{t+1}$  に依存するため,  $k_{t+1}$  は  $S_t$  に影響を与える。

### 3.5 動学経路

資本市場の均衡条件から

$$K_{t+1} = S_t(k_{t+1}, k_t, k_{t-1}) \quad (64)$$

を得る。(2) および (63) より, (64) は次のように書き換えられる。

$$k_{t+1} = v_1(k_{t+1}) + v_2(k_t) + v_3(k_{t-1}) + C \quad (65)$$

$$v_1(k_{t+1}) = -\frac{1}{2+n} \Gamma_2 \mathbb{E}y_{t+1}^2(k_{t+1}) \quad (66)$$

$$\begin{aligned} v_2(k_t) &= \frac{1}{2+n} \Gamma_1 \Phi^1(k_t) w_t^1(k_t) \\ &\quad + \frac{1}{(2+n)(1+n)} [\Phi^2(k_t) \Gamma_4 w_t^2(k_t) - \Gamma_5 \Gamma_2 \mathbb{E}y_t^2(k_t)] \end{aligned} \quad (67)$$

$$v_3(k_{t-1}) = \frac{1}{(2+n)(1+n)} \Phi^1(k_{t-1}) \Gamma_5 \Gamma_1 w_{t-1}^1(k_{t-1}) \quad (68)$$

<sup>21</sup>(19) および (20) から明らかである。



$$C = \frac{1}{(2+n)(1+n)} [\Gamma_6 - \Gamma_5 \Gamma_3] - \frac{1}{2+n} \Gamma_3 \quad (69)$$

$$\Phi^j(k_t) = m_t^j(k_t)(1 - \tau(k_t)) + (1 - m_t^j(k_t))\eta \quad (70)$$

$C$  は定数である。導出過程より明らかに、この式を満たす労働力人口一人あたり資本の流列  $\{k_t\}_{t=2}^\infty$  が存在すれば、その流列により競争均衡が得られる。すなわち、(48), (49), (56), (57), (58) より、 $\{w_t^j\}_{t=2}^\infty$ ,  $\{u_t^j\}_{t=2}^\infty$ ,  $\{r_t\}_{t=2}^\infty$  を得る。ただし、(58) で与えられているように利子率は定数である。

最後に、学習効果の仮定 (31) が (65) に与える影響について述べる。通常、学習効果は外部性を通じ内生的成長を生む源泉として導入されるが、本稿の設定では次節で見ると内生的成長は発生しない。一方、2.2 節の議論、特に (5) より、世代  $t$  の若年個人の貯蓄は、老年期になる  $t+2$  期の利子率  $r_{t+2}$  にも依存する。そのため競争均衡を特徴づける (64) は 3 階差分方程式となるはずである。しかしながら、仮定 (31) により、各期利子率は時間と独立になるため、(64) は簡略化され 2 階差分方程式となった。

### 3.6 定常均衡

最初に、定常状態を描写する。次いで、単純化するための仮定を設け、限定的な状況のもとであるが、定常均衡が存在するための条件を考える。

(65) より、定常状態が存在すれば次式が成立する。 $k_{t+1} = k_t = k_{t-1} = \bar{k}$  に対し、

$$\bar{k} = v_1(\bar{k}) + v_2(\bar{k}) + v_3(\bar{k}) + C \quad (71)$$

あるいは次のように書ける。

$$(2+n)(1+n)\bar{k} = (1+n+\Gamma_5) \{ \Phi^1(\bar{k})\Gamma_1 w^1(\bar{k}) - \Gamma_2 \mathbb{E}y^2(\bar{k}) - \Gamma_3 \} + \Phi^2(\bar{k})\Gamma_4 w^2(\bar{k}) + \Gamma_6 \quad (72)$$

ただし、 $\Phi^j(k) = m^j(k)(1 - \tau(k)) + (1 - m^j(k))\eta$  である。また、定常状態であるため期を表す添字は省略した。

簡略化のための仮定を設け、そのもとで定常均衡が存在する条件を考察する。 $\rho = r_t$ 、すなわち、 $\rho = \alpha A$  と仮定する。これにより、(24), (26) より、 $\Lambda_3 = \Lambda_5 = 0$  となるため、 $\Gamma_3 = \Gamma_6 = 0$  が成立しモデルはより簡潔に描写される。

|               |      |               |      |             |      |             |      |
|---------------|------|---------------|------|-------------|------|-------------|------|
| $\rho$        | 0.24 | $n$           | 0.01 | $\delta$    | 0.5  | $A$         | 1.0  |
| $\alpha$      | 0.3  | $\beta$       | 0.55 | $\mu_1$     | 2.0  | $\mu_2$     | 4.0  |
| $\mathcal{A}$ | 50.0 | $\mathcal{B}$ | 0.4  | $\lambda_1$ | 0.4  | $\lambda_2$ | 0.3  |
| $\phi_1$      | 1.2  | $\phi_2$      | 1.4  | $\gamma_1$  | 0.32 | $\gamma_2$  | 0.29 |
| $\eta$        | 0.4  |               |      |             |      |             |      |

表 1: パラメータの値

十分小さな  $k$  の値のとき (72) 式右辺は負の値になる。一方,  $\tilde{k} = \min(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$  を考える。ただし,  $u(\tilde{k}_j) = 1$  である<sup>22</sup>。(72)において,  $\tilde{k}$  で評価された右辺の値が, 左辺の値よりも大きければ, すなわち,

$$(2+n)(1+n)\tilde{k} < (1+n+\Gamma_5) \left\{ \Gamma_1 w^1(\tilde{k}) - \Gamma_2 \mathbb{E}y^2(\tilde{k}) \right\} + \Gamma_4 w^2(\tilde{k}) \quad (73)$$

が成立すれば,  $\bar{k}$  が区間  $(0, \tilde{k})$  に少なくとも一つ存在することになる。 $\Gamma_1 w^1(\tilde{k}) > \Gamma_2 \mathbb{E}y^2(\tilde{k})$  が成立し, かつ, その差が十分大きければ, (73) が成立し定常均衡が存在する可能性がある。換言すると, 若年期の賃金が壮年期の期待賃金より十分大きければ定常均衡が存在する。

### 3.7 定常均衡の存在と安定性：数値例

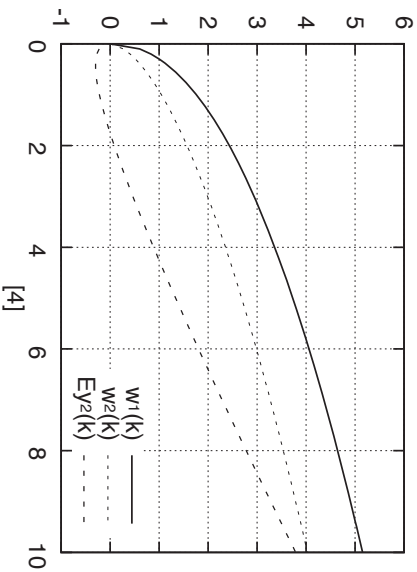
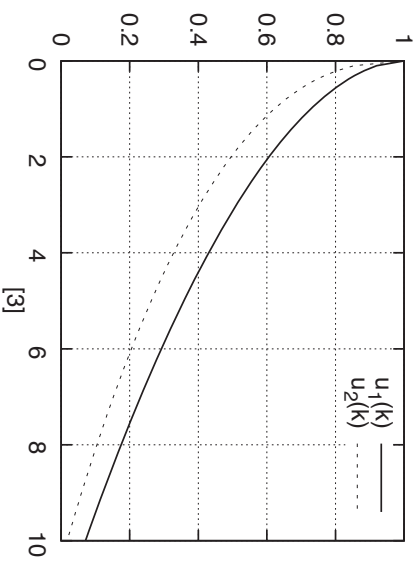
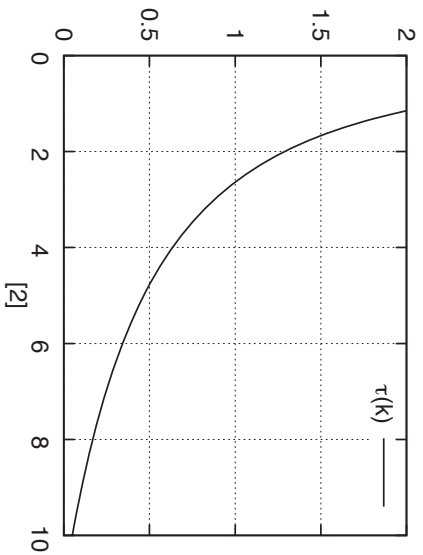
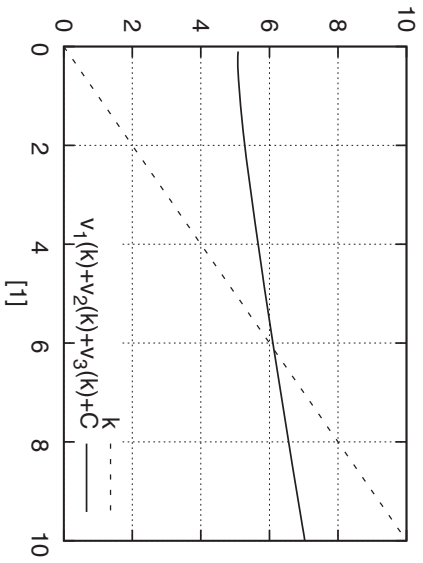
この節では, 定常均衡の存在とその安定性を数値例により示す。まず, 表 1 のパラメータのもとでは定常均衡が存在することを見る<sup>23</sup>。図 [1] は定常均衡の存在を示している。図 [1] の  $k$  が (71) の左辺を,  $v_1(k) + v_2(k) + v_3(k) + C$  が右辺をそれぞれ表している。両者が交点を持つことから定常均衡が存在することがわかる。 $\bar{k} = 6.13187$  であった<sup>24</sup>。

図 [2], 図 [3], 図 [4] は, それぞれ, 税率, 失業率, 賃金率のグラフである。いずれも, 定常均衡のみならず, 任意の期において成立することに注意しよう。図 [2] の税率は (59) をグラフにしたものであり,  $\tau'(k_t) < 0$ ,  $\tau''(k_t) > 0$  を反映した形状になっている。 $\tau(\bar{k}) = 0.32920$  であった。図 [3] の失業率は (48) お

<sup>22</sup> $u(0) = 1$ ,  $u'(\cdot) < 0$ ,  $u''(\cdot) > 0$  である。

<sup>23</sup>本稿では, モデルの特徴を説明するために数値例を使用する。全てのパラメータが実証的な根拠に基づいて設定されているわけではない。

<sup>24</sup>小数点以下 6 桁目を四捨五入している。以下同様。



よび (49) をグラフにしたものであり,  $\mathbf{u}^j'(k_t) < 0$ ,  $\mathbf{u}^j''(k_t) > 0$  を反映した形状になっている<sup>25</sup>.  $\mathbf{u}^1(\bar{k}) = 0.28411$ ,  $\mathbf{u}^2(\bar{k}) = 0.19776$  であった. 若年個人の失業率が, 壮年個人の失業率より高くなっていることがわかる<sup>26</sup>. 図 [4] 賃金率は (56), (57), (60) のグラフである.  $w^j'(k_t) > 0$ ,  $w^j''(k_t) < 0$  を反映した形状になっている. 期待所得は,  $k_t$  の増加関数となっている.  $w^1(\bar{k}) = 4.10168$ ,  $w^2(\bar{k}) = 3.02466$ ,  $\mathbb{E}y^2(\bar{k}) = 1.86695$  であった.

次にこれまで見た定常均衡の安定性を確認する. (65) 式を定常解の回りで線形近似する.

$$k_{t+1} - \bar{k} = \frac{v_2'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})}(k_t - \bar{k}) + \frac{v_3'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})}(k_{t-1} - \bar{k}) \quad (74)$$

固有方程式は, 固有値を  $\lambda$  とおくと次のようになる<sup>27</sup>.

$$\lambda^2 - \frac{v_2'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})}\lambda - \frac{v_3'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})} = 0 \quad (75)$$

固有値の絶対値がともに 1 より小さい場合, 定常均衡は安定的となる<sup>28</sup>.  $\frac{v_2'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})} = 0.36771$ ,  $\frac{v_3'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})} = 0.14897$  である. したがって固有値は,  $\lambda = 0.61138, -0.24367$  となる. とともに絶対値で 1 より小さいため図 [1] の定常均衡が安定的であることがわかる.

### 3.8 $\eta$ 引き上げの影響

失業給付率  $\eta$  の引き上げがこの経済にどのような影響を及ぼすかについて考察する. 3.8.1 節では, 政策パラメータの微小な変化により, 定常状態における賃金, 雇用率および失業率, 税率がどのように変化するかを見る. 3.8.1 節では, 移行過程について述べる. これまで通り  $\lambda_j + \gamma_j < 1$  を仮定する.

<sup>25</sup> 前述の通り,  $\lambda_j + \gamma_j < 1$  を前提にしている.

<sup>26</sup> この結果はパラメータの変化により,  $\lambda^j + \gamma^j < 1$  の制約を満たしていても, 容易に変化する. 例えば次節を参照.

<sup>27</sup>  $h_{t+1} = k_t$  とおくことにより,

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ h_{t+1} - \bar{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_2'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})} & \frac{v_3'(\bar{k})}{1 - v_1'(\bar{k})} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t - \bar{k} \\ h_t - \bar{h} \end{pmatrix}$$

を考え, 係数行列から (73) と同一の固有方程式を導出してもよい. ただし,  $\bar{h} = \bar{k}$  である.

<sup>28</sup> Galor (2007) などを参照.

### 3.8.1 比較静学

政策パラメータの微小な変化が  $w^j(\cdot)$ ,  $m^j(\cdot)$ ,  $\mathbf{u}^j(\cdot)$ ,  $\tau(\cdot)$  の形状を変化させる効果と、定常状態における  $\bar{k}$  の変化を通じてこれら諸変数に与える効果に分けて考えることができる。まず、前者の効果について述べる<sup>29</sup>。

失業給付率  $\eta$  の引き上げは、図 [2] のグラフ  $w^1, w^2$  を上方にシフトさせる。これは、交渉による賃金決定ルール (29), あるいは同じことであるが、(52) が原因となり生じる。本稿の構造では、二つの変数への影響を通じて現れる。一つは、(53) より  $\frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} > 0$  によって表される。これは、賃金が労働の限界生産性と失業給付の加重和であることから、 $\eta$  の上昇が賃金決定ルールを經由して引き上げられることを意味している。もう一つは、(42), (45), (56), (57) より、 $\frac{\partial w^j}{\partial \Psi_j} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} > 0$  によって表される<sup>30</sup>。これは、 $\eta$  の上昇が、労働需要を引き下げ労働の限界生産性を引き上げることと関連している<sup>31</sup>。

$\eta$  の引き上げが  $m^j(\cdot)$ ,  $\mathbf{u}^j(\cdot)$  に与える影響について述べる。 $\eta$  の引き上げにより雇用率は低下する。(42), (45), (46), (47) より直ちに、 $\frac{\partial m^j}{\partial \Psi_j} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} < 0$  から理解できる。これは、失業給付の上昇が賃金を上昇させ労働需要が低下することの帰結である。失業給付が与える雇用率への影響は世代ごとに異なる。(45) より、 $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \Omega} = \frac{\lambda_j}{1-\lambda_j} (\lambda_j \mu_j^{-1} \phi_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \Omega)^{\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j} - 1} > 0$  であり、この大きさは世代によって異なるパラメータに依存するからである。 $\lambda_j$ ,  $\phi_j$  が大きい世代の方が、失業給付率引き上げにより雇用率は大きく影響を受ける。(34) より、マッチングがスムーズに行われる世代の方がより大きな影響を受けるとも言える。 $\eta$  の  $\mathbf{u}^j(\cdot)$  への影響は、その定義 (48) および (49) により、これまでの議論から明らかである。

$\eta$  の引き上げが税率  $\tau$  に与える影響について述べる。 $\eta$  の引き上げは図 [2] のグラフを上方にシフトさせる。(59) から明らかに二つの経路がある。一つは直接的な効果で (59) 式の  $\eta$  が上昇することによる。もう一つは、同じく (59) 式の  $\Psi_j$  を通じた効果である<sup>32</sup>。すなわち、失業給付の引き上げにより雇用者報酬が減少し税金が減少するため税率を引き上げなければならないことを意味している。

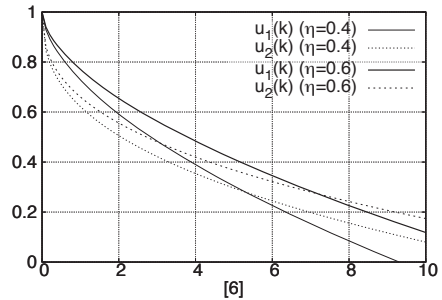
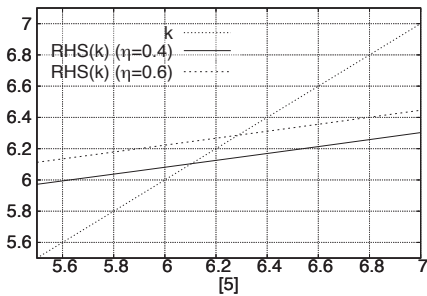
最後に、定常均衡において、 $\eta$  の変化が、 $w^j(\cdot)$ ,  $m^j(\cdot)$ ,  $\mathbf{u}^j(\cdot)$ ,  $\tau(\cdot)$  に及ぼす影響について述べる。 $\eta$  の変化は、(71) の右辺、すなわち、図 [1] の  $v_1 + v_2 + v_3 + C$  をシフトさせることにより、 $k$  の定常値に影響を与える。この効果  $\frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta}$  がわかれ

<sup>29</sup> 定常均衡のみならず、移行過程においても成立する議論である。

<sup>30</sup> (56), (57) より  $\frac{\partial w^j}{\partial \Psi_j} < 0$ , (45) より  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \Omega} > 0$ , (42) より  $\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} < 0$  は明らかである。

<sup>31</sup> (54), (55) を参照。

<sup>32</sup> 上で見た通り、 $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} < 0$  である。



ば、これまでの議論から  $w^j(\cdot)$ ,  $m^j(\cdot)$ ,  $\mathbf{u}^j(\cdot)$ ,  $\tau(\cdot)$  に及ぼす影響の全体像が理解できる。例えば、定常状態における賃金への影響は、(56) および (57) に  $\bar{k}$  を代入することにより、 $\delta$  を通じた影響、 $\Psi_j$  を通じた影響、 $\bar{k}$  を通じた影響の和となることがわかる。 $m^j(\cdot)$ ,  $\mathbf{u}^j(\cdot)$ ,  $\tau(\cdot)$  についても同様である。ただし、 $\eta$  が、(65), (67), (67), (68), (69), (70) に与える影響は複雑であるため、次節で数値例による結果を述べるにとどめる。

### 3.8.2 移行過程

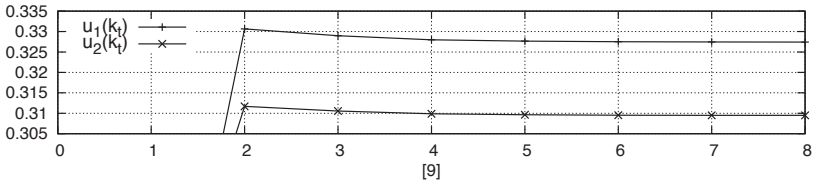
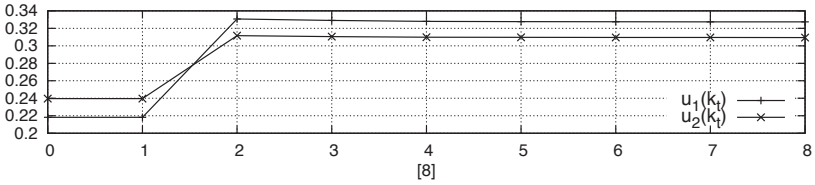
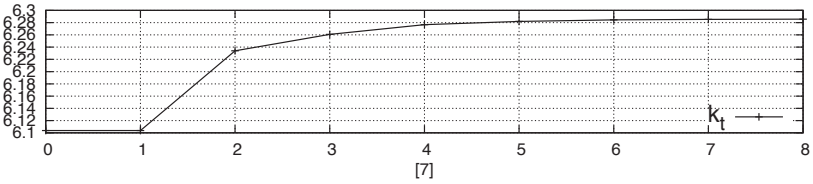
本節では、 $\eta$  を 0.4 から 0.6 へと引き上げたとき新しい定常状態へ移行する様子を数値例で確認する。本節の数値例は、 $\eta$  の変更に加え、 $\gamma_1 = 0.35$  および  $\gamma_2 = 0.27$  と設定した点が表 1 と異なる<sup>33</sup>。図 [5] が示す通り、(71) の右辺は上方にシフトするため、新たな定常状態は上方にシフトし、労働人口一人あたり資本ストックは 6.28602 になった<sup>34</sup>。図 [6] は、失業率 (48), (49) のシフトを表している。本節の数値例のもとでは、若年および壮年の失業率を表す曲線は交差し、 $\eta$  の上昇により両者とも上方へシフトすることがわかる。

図 [7], 図 [8] は、1 期まで  $\eta = 0.4$  のもとで定常状態にあり、2 期に  $\eta = 0.6$  へと変化させた場合の労働力人口一人あたり資本ストックおよび失業率の移行過程をプロットしたものである<sup>35</sup>。図 [7] から  $k$  は新たな定常状態に向かって単調に増大していることがわかる。一方、失業率については 2 つのことがわか

<sup>33</sup>すなわち、図 [5] の  $\text{RHS}(k)(\eta = 0.4)$  は、 $\gamma_1 = 0.35, \gamma_2 = 0.27, \eta = 0.4$  における (71) の右辺、 $\text{RHS}(k)(\eta = 0.6)$  は、 $\gamma_1 = 0.35, \gamma_2 = 0.27, \eta = 0.6$  における (71) の右辺である。これら以外のパラメータは表 1 の通りである。

<sup>34</sup>固有方程式の固有値は、0.82795 および -0.27037 となり、定常均衡は安定的であった。

<sup>35</sup>図 [9] は、失業率の変化が読みやすいよう、図 [8] を拡大したものである。



る。一つは、 $\eta$ の上昇により、失業率は一旦上昇し、その後、新たな定常状態に向けて減少していることである。もう一つは、古い定常状態から移行過程に入るとき、若年失業率と壮年失業率が逆転していることである<sup>36</sup>。また、前節で議論した通り、 $w^j(\cdot)$ は $\eta$ の増加関数であり、 $k$ が単調に増大するため、定常状態における賃金率も上昇する。

## 4 おわりに

本稿では、労働を供給する若年世代および壮年世代、そして、引退し労働を供給しない老年世代からなる3世代重複モデルに、学習効果 (learning by doing) と失業を導入し、資本蓄積とともに世代別の失業が変化する状況を描写できるモデルを提示した。失業はサーチ活動に伴い発生し、若年個人と壮年個人とではマッチングの効率性が異なると仮定した。マッチング関数に労働力人口一人あたり資本ストックを入れたことが本稿の特徴であり、それぞれの世代の失業率が資本蓄積とともに変化するという結果はこの設定に依拠している。学習効

<sup>36</sup>実際の日本のデータでも、世代別失業率が逆転する現象は観察される。

果が存在するにも関わらず内生的成長が生まれない理由は、このような労働市場の構造と貯蓄関数を2次関数にしたことにある。

三宅 (2010) および三宅 (2014) においても若年世代と壮年世代が労働を供給した。しかしながら、単純化のため老年世代が存在しておらず、壮年世代に貯蓄の誘引がなかった。これは貯蓄不足の原因となり、数値計算のためには極端なパラメータを設定する必要があった<sup>37</sup>。本稿では労働を供給しない老年世代が存在するため、壮年世代に貯蓄をする誘引があり、貯蓄不足の問題は発生しない。

本稿では、労働力人口一人あたり資本ストックが増大するにしたがい、若年個人の失業率も壮年個人の失業率も低下する様子を描写した。これは、マッチング関数において、労働力人口一人あたり資本ストックのパラメータとして正の値を設定したことの帰結であり、負の値に設定すれば、両者の関係は逆転する。また、定常状態における失業給付率の変更が定常均衡に与える効果について数値例による結果を得た。失業給付率の上昇は、定常状態における労働力人口一人あたり資本ストックを上昇させた。

資本蓄積にしたがい世代別の失業率が推移していく状況を描写できるモデルはこれまでなかったため意義ある結果である。しかしながら、若年失業の発生原因を考えると、現実の側面を描写するには至っていない。本稿の結果を維持しつつ、労働市場の制度的な側面を考慮に入れたモデルの構築が今後の課題である。

## 参考文献

- Azariadis, C. and C. A. Pissarides (2007) “Unemployment Dynamics with International Capital Mobility,” *European Economic Review*, Vol. 51, pp. 27–48.
- Bean, C. and C. A. Pissarides (1993) “Unemployment, Consumption and Growth,” *European Economic Review*, Vol. 37, pp. 837–854.
- Galor, Oded (2007) *Discrete dynamical systems*: Springer Science & Business Media.

---

<sup>37</sup>遺産動機を捨象したことも原因の一つである。



- Gorry, Aspen (2013) “Minimum wages and youth unemployment,” *European Economic Review*, Vol. 64, pp. 57–75.
- Hiraguchi, Ryoji (2011) “A note on the competitive search model of Azariadis and Pissarides,” *European Economic Review*, Vol. 55, pp. 304–306.
- Jones, Larry E and Rodolfo E Manuelli (1992) “Finite lifetimes and growth,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 58, pp. 171–197.
- Modesto, Leonor (2008) “Unions, Firing Costs, and Unemployment,” *Labour*, Vol. 22, pp. 509–546.
- Ono, Tetsuo (2010) “Growth and unemployment in an OLG economy with public pensions,” *Journal of Population Economics*, Vol. 23, pp. 737–767.
- Petrongolo, B. and C.A. Pissarides (2001) “Looking into the black box: A survey of the matching function,” *Journal of Economic Literature*, Vol. 39.
- Yakita, Akira (2014) “Involuntary unemployment and sustainability of bond-financed fiscal deficit,” *Journal of Macroeconomics*, Vol. 41, pp. 79–93.
- 三宅 (2010) “高齢化が世代別失業率に与える長期的影響：基本モデル構築の試み,” 西南学院大学 経済学論集, Vol. 45, pp. 23–50.
- (2014) “Existence fo a Steady State Equilibrium in an Overlapping Generations Model with Two Working Generations and Unemployment,” 西南学院大学 経済学論集, Vol. 48, pp. 75–91.