平方完成による最小二乗推定量の導出方法について

中　馬　正　博

序

最小二乗法については基礎的な統計学の教科書でも取り上げられている。むしろ初歩の初歩を謳うような教科書でさえも，最小二乗法による単回帰，重回帰について全く触れないものを探す方が難しいほどである。最小二乗推定量は，記述統計学の一要素として，線形モデルにおける回帰分析を取り上げる過程で，残差平方和を最小化する線形回帰式の係数を示すものとして説明されている。

しかし，その取り上げられ方は様々である。入門書の中には，例えば石村［7］，原田［51］，ホーエル［53］のように，最小二乗推定量の導出過程の説明を省略して，最小二乗法を適用して得られる推定量がいかなる算式として表せるかを示すに止めるものもある。また，導出過程を明示する入門書においても，平井ほか［52］のように平方完成を利用するものもあるが，多くの教科書は高校数学で取り上げられていない偏微分を用いて正規方程式と呼ばれる連立一次方程式を導き，その解として最小二乗推定量を導出している。多くの入門書が高校までに学んでいる内容を前提にして，見通し良く様々なテーマを取り扱おうと努めているに違いないが，最小二乗推定量の導出過程を含む一連の説明については，その方針を貫徹できているわけではない。

社会科学専攻の文科系初年次生向けとする教科書においても，最小二乗法の取り上げられ方はほぼ同様である。最小二乗推定量の導出過程に言及しようとして，結局のところ多くの教科書が偏微分の知識を前提にして正規方程式を導き，最小

二乗推定量が単回帰の場合は２元連立一次方程式，重回帰の場合は定数項を含む３説明変数に限定して，３元連立一次方程式の解となるとする説明に頼っている。

正規方程式の導出については，偏微分ではなくベクトルの知識を前提とすることもできる。被説明変数のベクトルと推定値のベクトルの差を表す残差ベクトルの絶対値を最小化するには，残差ベクトルと説明変数のベクトルが直交する必要がある。正規方程式は幾何学的に理解できる直交条件，残差ベクトルと説明変数のベクトルの内積が０となることを利用して導くことができる。

しかし，2022年度から実施されている高校数学の新学習指導要領において，ベクトルの項目は従来の数学 B から理科系の高校3年生のみが学ぶ数学 C に移動しており，文科系の初年次教育としては，この説明方法にも無理が生じている。経済学部を含む文科系学部においては，講義で若干の説明を補足したとしても，偏微分による方法と同様に説得力ある説明となり得るか不安が残る。

また，線形回帰の正規方程式の数値例を解くに際して，連立一次方程式の係数がたいへん大きな値となることも多く，要求される２元連立一次方程式，３元連立一次方程式の計算は煩雑な作業となる。パソコンソフトを利用して手軽に計算できる時代を反映してか，この点に配慮した教科書は見当たらない。例えば関数電卓の利用に限定すると，正規方程式から実用的に計算結果を求めるには，掃き出し法などの線形代数の知識を補足しなくてはならない。

松原［56］は，行列による記述は統一的な見通しは良くなるものの，特に文科系の初学者には細部を理解する上で有益とは限らず，定数項まで含めて３説明変数の場合までは，方法の実践的理解のため，高校生にも計算できる初歩的な方法で記述を進めることが役立つと述べている。しかし，実際に入門書を管見する限り，大方は初年次教育では感触だけを伝えて済ませ，専門教育において，行列による一般的な定式化の下で最初から学び直す方が良いという判断に傾いているように思われる。教科書による説明の現状を見る限り，多くの入門書の執筆者が導出方法を丁寧に示すことなく，簡単な数値例による説明で済ませている背景には，このような判断があるに違いない。初心者の学力に沿った丁寧な説明の工夫は，未だ不十分のように思われる。

本論文では，第１章において統計学の初心者向け教科書が最小二乗推定量の導

出過程をどのように取り扱っているか大まかに整理し，第２章では既存の教科書の多くが採用している正規方程式から最小二乗推定量を導出する方法を要約する。本論文では，分散 s_x^2 が２乗の平均 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ から平均の２乗 $\bar{x}^2$ を差し引いたもの，共分散 s_{xy} が積の平均 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ から平均の積 $\bar{x}\cdot\bar{y}$ を差し引いたものに等しいという基本的な関係を活用して計算を進める。第３章では平方完成を利用して，単回帰，重回帰の最小二乗推定量の導出過程をまとめる。平方完成による導出方法は，正規方程式による方法と比べて，微分やベクトルの知識を必要としない。計算が煩雑になるという印象があるためか，毛塚［27］のようにあまりお勧めしないと注記するものさえある。しかし，実際に試みると，意外に無理なく計算を進めることができることがわかる。平方完成による方法は，単に偏微分を避けるというだけでなく，最小二乗推定量の導出過程と整合的に決定係数を理解する上で有効であることもわかる。結語では，本論文のまとめとして，統計学の入門書における最小二乗推定量の取り扱い方を整理した上で，初年次教育における最小二乗法の妥当な説明方法として，どのような説明が良いか考える。偏微分について学んでいない受講者を前提とする限り，現段階では平方完成による説明を主たる説明として，偏微分による説明は将来の学習に備えて補足するのが良い。平方完成は中学時代から馴染んだ二次関数の最大値，最小値を求める方法であり，最小二乗法の説明において一見煩雑に見えても，最小値に注目すれば意外なメリットもあり，統計学の入門書における最小二乗推定量の導出に際して，もっと利用されて良いのではなかろうか。

第１章　初心者用の教科書における最小二乗法の取り扱い

近年，統計学への関心が高まりを見せており，初心者向けに多くの教科書が出版されている。これらのほとんどが回帰分析を取り上げ，最小二乗法による線形回帰，回帰式のパラメーターについて説明している。

本章では，統計学の入門書が線形回帰の説明に際して，最小二乗法をどのように取り扱っているか確認する。最小二乗法の取り扱い方としては，大まかに①導出方法に関する具体的説明は行わないもの，②偏微分により正規方程式を求め，

正規方程式の解として最小二乗推定量の導出過程を示したもの，③平方完成により最小二乗推定量の導出過程を示したものの３通りに分けることができる。

方法①による例として，石村［7］，山田［71］は単回帰の最小二乗推定量を係数とする直線を示し，これを回帰直線，そのパラメーターを回帰係数と定義している。津村ほか［44］も，初心者に配慮して導出過程の説明なしに，最小二乗法によると回帰係数が次のように求められるという記述を行っている。

方法②による例としては，石谷［6］，宮川［62］などを挙げることができる。従来から多数の教科書が採用してきた方法であり，残差平方和を偏微分した上で０とおくことにより正規方程式を導出し，その解として最小二乗推定量を示している。宮川［62］のように正規方程式の意味や計算過程を丁寧に説明するものもあるが，特に単回帰の場合は正規方程式が連立２元１次方程式で易しいためか，正規方程式を解く過程の説明を省略するものも多い。

方法③の例としては岡田［18］などを挙げることができる。井上［8］や松原ほか［57］では偏微分を使う方法を示した上で，偏微分を使わない方法として平方完成による方法を補足的に取り上げ，最小二乗推定量の導出過程を示している。残差平方和を展開して，パラメーターごとに二次関数となることを示した上で平方完成を行い，残差平方和が最小となるパラメーターの値として最小二乗推定量を導いている。松原ほか［57］において，平方完成による最小二乗推定量の導出過程で，「多少厳密ではないが…」という注がある点については，パラメーターごとに個別に降冪に整理した算式を平方完成して推定量を求めて，最小値に他の未知数が残り数値が確定していないことに配慮したものであろう。

表１には本論文の参考文献とした教科書における最小二乗法の導出方法の取り扱い方を４つに分類してまとめた。定数項を表すパラメーターについて残差平方和を偏微分して０とおくことによって得られる関係を用いて，残差平方和を１変数関数に変形し，傾きを表すパラメーターを平方完成で求めるという教科書もあったため，表１の分類は４通りとなっているが，基本的には導出方法を示すか，示さないか，示す場合は偏微分に基づく正規方程式によるか，残差平方和を表す２次関数の平方完成によるかの３通りと整理することができる。平方完成による方法の採用例は極めて少ないものと思われたが，意外にも少なからぬ教科書で偏微分の利用を避け，平方完成による説明が試みられていることを確認することができる。

表１　導出過程の取り扱い

導出過程なし	[７][24][29][30][35][37][43][44][45][46][50][51][53][71][73]
偏微分と正規方程式	[１][３][４][５][６][８][９][10][11][13][14][16][17][19][20][21][22][23][25][26][27][31][32][34][36][39][40][42][47][48][49][54][55][56][57][58][59][60][61][62][63][64][65][66][67][68][69][70][72][74][75]
偏微分と平方完成	[41]
平方完成	[２][８][10][11][12][15][18][23][26][28][33][38][52][57][61][72]

第２章　正規方程式からの推定量の導出

最小二乗法は残差平方和を最小とするように係数の推定値を決める方法であり，正規方程式は回帰直線の係数をパラメーターとする残差平方和を偏微分したものが０となることから導かれるものである。従って，係数の数と正規方程式を構成する方程式の数は等しい。正規方程式は，定数項も含む係数が２つの単回帰の場合は連立２元１次方程式，定数項を含む係数が３つの重回帰の場合は，連立３元１次方程式となる。全く同様に定数項を含む係数が３個以上の k 個の重回帰の場合は，連立 k 元１次方程式となる。あまりに基本的な内容で改めて記述するまでもないようだが，教科書によって線形回帰の説明に利用される文字や記号に差があるので，本論文の定式化に沿って，正規方程式からの導出方法を簡単にまとめることにする。第１節では単回帰，第２節では重回帰について，正規方程式から最小二乗推定量を導出している。また，第３節では残差ベクトルと説明変数の直交条件からどのように正規方程式を導出できるか示している。なお，本章の計算に際しては，見通しよく計算を進めるため，分散 s_x^2，共分散 s_{xy} に関する以下の関係式を繰り返し利用している。

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

2.1　単回帰

説明変数を x_i，被説明変数を y_i，残差を e_i と表すと，線形回帰式は次のように表せる。

$$y_i = a + bx_i + e_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

正規方程式は残差平方和 $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ を係数 a,b について偏微分すると，次のとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0$$

この結果から残差 e_i の総和が０，説明変数 x_i と残差 e_i の積の総和が０であることを示す２式が得られ，これが正規方程式と呼ばれる。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \therefore\ na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \quad \therefore\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

このまま，２元連立方程式として解く方法を説明する教科書も多いが，本論文では２式の両辺をデータの個数nで割り，次のように表すことにする。

$$a + b\bar{x} = \bar{y} \qquad \cdots①$$

$$a\bar{x} + b\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \cdots②$$

②−①× $\bar{x}$

$$b\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

分散 s_x^2 は二乗 x_i^2 の平均から平均 $\bar{x}$ の２乗を差し引いたものに，共分散 s_{xy} は積 $x_i y_i$ の平均から平均 $\bar{x},\bar{y}$ の積を差し引いたものに等しいので，最小二乗推定量は次のように求められる。松原［56］は推定量が説明変数，被説明変数の標準偏差 s_x，s_y，相関係数 r_{xy} で表せることにも注目して，回帰分析が相関関係の応用の一つであると説明している。

$$\therefore\ b\cdot s_x^2 = s_{xy} \qquad \therefore\quad b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_y}{s_x}\cdot r_{xy} \qquad \therefore\quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (\because\quad ①\ )$$

2.2　重回帰

重回帰は２つ以上の説明変数を用いる方法であるが，多くの入門書で定数項まで含めて３つの係数を推定する場合を取り扱っている。説明変数を x_i，z_i，被説明変数を y_i，残差を e_i とすると，回帰式は次のように表せる。

$$y_i = a + bx_i + cz_i + e_i \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

残差平方和は回帰係数 a,b,c の関数で，正規方程式は残差平方和を回帰係数で偏微分したものが０に等しいという結果から導かれ，残差 e_i の総和が０，説明変数 x_i と残差 e_iの積の総和が０，説明変数 z_i と残差 e_i の積の総和が０であることを示す３式から構成されている。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i - cz_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i - cz_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} z_i e_i = \sum_{i=1}^{n} z_i(y_i - a - bx_i - cz_i) = 0$$

$$\therefore \ na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} z_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + c\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

松原［56］は以上の正規方程式を平均からの偏差による２式に改めた上で，クラーメルの公式を用いて回帰係数の最小二乗推定量を導いている。高校で学ぶことのない知識を前提にせず，本論文では単回帰のときと同様に，正規方程式の両辺を n で割り，次のように書き改めた上で解を求める。

$$\therefore \ a + b\bar{x} + c\bar{z} = \bar{y} \qquad \cdots①$$
$$a\bar{x} + b\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \cdots②$$
$$a\bar{z} + b\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + c\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \qquad \cdots③$$

分散が２乗の平均から平均の二乗に等しく，共分散が積の平均から平均の積を差し引いたものに等しいことを利用すると次のように変形できる。

②−①×$\bar{x}$

$$bs_x^2 + cs_{xz} = s_{xy} \quad \cdots ④$$

③−①×$\bar{z}$

$$bs_{xz} + cs_z^2 = s_{yz} \quad \cdots ⑤$$

④×s_z^2/s_{xz} −⑤

$$b\left(\frac{s_x^2 s_z^2}{s_{xz}} - s_{xz}\right) = \frac{s_z^2 s_{xy}}{s_{xz}} - s_{yz} \qquad \therefore \quad b = \frac{s_z^2 s_{xy} - s_{xz} s_{yz}}{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2} = \frac{s_y}{s_x} \cdot \frac{r_{xy} - r_{xz} r_{yz}}{1 - r_{xz}^2}$$

⑤−④×s_{xz}/s_x^2

$$c\left(s_z^2 - \frac{s_{xz}^2}{s_x^2}\right) = s_{yz} - \frac{s_{xy} s_{xz}}{s_x^2} \qquad \therefore \quad c = \frac{s_x^2 s_{yz} - s_{xy} s_{xz}}{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2} = \frac{s_y}{s_z} \cdot \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{1 - r_{xz}^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z} \quad (\because \ ① \ )$$

2.3　ベクトルの利用

正規方程式の導出については，管見する限り全ての教科書が残差平方和を説明変数の係数について偏微分して０とおくことによっている。残差平方和は残差ベクトルの絶対値の２乗であり，残差平方和 $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ の最小化は残差ベクトルの絶対値 $|\boldsymbol{e}|$ を最小化することと同値である。若干のベクトルの知識を前提とできれば，R・J ウォナコット［11］で重要な性質として説明されている性質，つまり最小二乗法では残差ベクトルが説明変数の各々と直交するという性質から正規方程式を導出することもできる。しかし，学習指導要領の変更により，ベクトルが理科系のみが受講する数学 C に移動していることと合わせ考えると，この説明法も偏微分による方法と同様に，文科系初年次で利用することには問題があるかもしれない。

2.3.1 単回帰

残差ベクトル $\boldsymbol{e}$ の絶対値を最小化するには，残差ベクトル $\boldsymbol{e}$ は推定値のベクトル $\hat{\boldsymbol{Y}}(= a\boldsymbol{1} + b\boldsymbol{X})$ で表される平面と垂直となり，説明変数のベクトル $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{X}$ と直交しなければならない。従って，内積$(\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{e}), (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e})$が０となる。

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=a\mathbf{1}+b\boldsymbol{X}+\boldsymbol{e}=a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{e})=\textstyle\sum_{i=1}^{n}e_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0$$

$$(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{e})=\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-a-bx_i)=0$$

$$\therefore\ na+b\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$a\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

2.3.2　重回帰

残差ベクトル $\boldsymbol{e}$ の絶対値を最小化するには，残差ベクトル $\boldsymbol{e}$ は推定値のベクトル $\widehat{\boldsymbol{Y}}(=a\mathbf{1}+b\boldsymbol{X}+c\boldsymbol{Z})$ で表される平面と垂直となり，説明変数のベクトル $\mathbf{1},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}$ と直交しなければならない。従って，内積 $(\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{e}),(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{e}),(\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{e})$ が０となる。

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=a\mathbf{1}+b\boldsymbol{X}+c\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{e}=a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{e})=\textstyle\sum_{i=1}^{n}e_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i-cz_i)=0$$

$$(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{e})=\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-a-bx_i-cz_i)=0$$

$$(\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{e})=\textstyle\sum_{i=1}^{n}z_ie_i=\sum_{i=1}^{n}z_i(y_i-a-bx_i-cz_i)=0$$

$$\therefore\ na+b\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i+c\sum_{i=1}^{n}z_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$a\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$a\textstyle\sum_{i=1}^{n}z_i+b\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+c\sum_{i=1}^{n}z_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_iz_i$$

第３章　平方完成による最小二乗推定量の導出について

最小二乗推定量は残差平方和を説明変数の係数について偏微分して０とおくことによって導かれる正規方程式の解として求められることが多いが，やや計算式が煩雑とは言うものの，平方完成によって導出することもできる。平方完成は，説明変数の係数の二次式を変形して，見かけ上の一次の項をなくして二次の項だけにすることである。平方完成によれば，２乗された項は非負であるという実数の性質を利用するだけで，説明変数の係数の２次関数である残差平方和が最小となる係数の大きさと，残差平方和の最小値を得ることができる。本章では単回帰と重回帰の残差平方和に対して，平方完成を適用して最小二乗推定量を求める。

3.1　単回帰

平方完成を利用して単回帰における最小二乗推定量を導出している鈴木［35］，竹内［40］，森棟［68］の説明をまとめる。但し，そのままでは文字の対応関係がわかりにくいので，本論文で利用する記号に置き換えた上でその導出過程を確認する。

単回帰においては，被説明変数 y_i は定数項 a，回帰係数 b，説明変数 x_i，残差 e_iを用いて，次のように表すことができる。

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

$$\therefore \quad y_i - \bar{y} = a + bx_i + e_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) + a + b\bar{x} - \bar{y} + e_i \qquad \cdots①$$

$a + b\bar{x} - \bar{y}$ は，添え字iについては定数なので $\varDelta$とおくと，①は次のように表せる。

$$y_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) + \varDelta + e_i \qquad \cdots②$$

$$\therefore \ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \{(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x}) - \varDelta\}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\varDelta^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$
$$+2b\varDelta \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) - 2\varDelta \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\left\{b^2-2b\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}+n\Delta^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\left\{b-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}^2+n\Delta^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2-\frac{\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= ns_x^2\left(b-\frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2+n\Delta^2+ns_y^2\left(1-\frac{s_{xy}^2}{s_x^2s_y^2}\right)$$

$$= ns_x^2\left(b-\frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2+n(a+b\bar{x}-\bar{y})^2+ns_y^2\left(1-r_{xy}^2\right)$$

第１項の係数 ns_x^2，第２項の係数 n が正であるので，残差平方和は次の２つの関係が同時に満たされる時に最小となることがわかる。

$b=\frac{s_{xy}}{s_x^2}$ ，　$\Delta=a+b\bar{x}-\bar{y}=0$　∴　$a=\bar{y}-b\bar{x}$

以上の説明については，②の関係を導出するに際して，最初から正規方程式の第１式，つまり回帰直線が，説明変数と被説明変数の平均を座標とする点 $(\bar{x},\bar{y})$ を通ることを意識しているように思われ，Δ がやや技巧的な定義となっているような印象を受ける。

しかし，平方完成による導出に際して，以上のような定義を伴う変形がどうしても必要というわけではない。本論文では，大野ほか［15］と同様に，変量 a,b について降冪に残差平方和を直接整理する自然な変形を通じて，同様の結果を導けることを確認する。

$\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(a+bx_i)\}^2=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i^2-2(a+bx_i)y_i+(a+bx_i)^2\right\}$

$=na^2-2a\sum_{i=1}^{n}y_i+2ab\sum_{i=1}^{n}x_i+b^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2b\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$

$=n\{a^2-2a(\bar{y}-b\bar{x})\}+b^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2b\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$

$=n\{a-(\bar{y}-b\bar{x})\}^2+b^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2b\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n(\bar{y}-b\bar{x})^2$

$=n\{a-(\bar{y}-b\bar{x})\}^2+n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2\right)b^2-2n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}\right)b$

$\quad+n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\bar{y}^2\right)$

$=n\{a-(\bar{y}-b\bar{x})\}^2+n\left(s_x^2b^2-2s_{xy}b+s_y^2\right)$

$$= n\{a-(\bar{y}-b\bar{x})\}^2 + n\left\{s_x^2\left(b^2 - 2\frac{s_{xy}}{s_x^2}b\right) + s_y^2\right\}$$
$$= n\{a-(\bar{y}-b\bar{x})\}^2 + n\left\{ s_x^2\left(b - \frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2 + s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\right\}$$
$$= n\left[\{a-(\bar{y}-b\bar{x})\}^2 + s_x^2\left(b - \frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2\right] + ns_y^2\left(1 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}\right) \quad \cdots ③$$

よって，a, b について次の関係が同時に満たされるとき，残差平方和は最小となる。

$a = \bar{y} - b\bar{x}$ ，$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$

また，この時の残差平方和の最小値は，③より以下のような値となる。被説明変数を定数項だけで説明する k が 1 の場合の定数項aの最小二乗推定量は被説明変数の平均 $\bar{y}$ となり，残差平方和 $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ の最小値は分散 s_y^2 の n 倍であることを前提にすると，これは定数項に説明変数 x_i を追加する単回帰で被説明変数 y_i を説明したことによって，残差の最小値が相関係数の２乗倍だけ小さくなったことを示している。この倍率が説明変数 x_i の説明力を示す決定係数 R^2 である。

$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \geq ns_y^2\left(1 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}\right)$

$R^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}$

3.2　重回帰

本節では重回帰の最も簡単な例として，被説明変数 y_i を説明する２変数 x_i と z_i を想定する。重回帰の場合も平方完成によって，残差平方和を最小化する３つのパラメーター a, b, c を求めることができることを確認する。また，残差平方和の最小値が重回帰を行うことによってどれだけ小さくなるか調べることにより，重回帰における決定係数 R^2 が求められることも確認する。

$y_i = a + bx_i + cz_i + e_i$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\{y_i - (a + bx_i + cz_i)\}^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i - cz_i)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + na^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c^2\sum_{i=1}^{n} z_i^2$

$-2a\sum_{i=1}^{n} y_i - 2b\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2c\sum_{i=1}^{n} y_i z_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i + 2ac\sum_{i=1}^{n} z_i + 2bc\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$

a について整理すると，次のとおり。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = n\{a^2 - 2(\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})a\} + b^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2bc \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$
$$+c^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2c \sum_{i=1}^{n} y_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 - n(\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})^2 + b^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2bc \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$
$$+c^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2c \sum_{i=1}^{n} y_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

さらに b について整理して平方完成する。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + b^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) - 2b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right)$$
$$+2bc\left(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - n\bar{x}\bar{z}\right) + c^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - nc^2\bar{z}^2 - 2c \sum_{i=1}^{n} y_i z_i + 2nc\bar{y}\bar{z} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2 b^2 - 2ns_{xy} b + 2ncs_{xz} b + ns_z^2 c^2 - 2ns_{yz} c + ns_y^2$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2\left\{b^2 - 2\left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)b\right\} + ns_z^2 c^2 - 2ns_{yz} c + ns_y^2$$

さらに c について整理して平方完成する。

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2\left\{b - \left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)\right\}^2$$
$$-n\frac{(s_{xy} - cs_{xz})^2}{s_x^2} + ns_z^2 c^2 - 2ns_{yz} c + ns_y^2$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2\left\{b - \left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)\right\}^2$$
$$+n\left(s_z^2 - \frac{s_{xz}^2}{s_x^2}\right)c^2 - 2n\left(s_{yz} - \frac{s_{xy}s_{xz}}{s_x^2}\right)c + ns_y^2 - n\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2\left\{b - \left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)\right\}^2$$
$$+n\left(\frac{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2}{s_x^2}\right)c^2 - 2n\left(\frac{s_x^2 s_{yz} - s_{xy}s_{xz}}{s_x^2}\right)c + ns_y^2 - n\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2\left\{b - \left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)\right\}^2$$
$$+n\left(\frac{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2}{s_x^2}\right)\left(c^2 - 2\frac{s_x^2 s_{yz} - s_{xy}s_{xz}}{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2}c\right) + ns_y^2 - n\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$$
$$= n\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + ns_x^2\left\{b - \left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)\right\}^2 + n\left(\frac{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2}{s_x^2}\right)\left\{c - \left(\frac{s_x^2 s_{yz} - s_{xy}s_{xz}}{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2}\right)\right\}^2$$
$$+ns_y^2 - n\frac{s_{xy}^2}{s_x^2} - n\frac{(s_x^2 s_{yz} - s_{xy}s_{xz})^2}{s_x^2(s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2)}$$
$$= n\left[\{a - (\bar{y} - b\bar{x} - c\bar{z})\}^2 + s_x^2\left\{b - \left(\frac{s_{xy} - cs_{xz}}{s_x^2}\right)\right\}^2 + \frac{s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2}{s_x^2}\left\{c - \left(\frac{s_x^2 s_{yz} - s_{xy}s_{xz}}{s_z^2 s_z^2 - s_{xz}^2}\right)\right\}^2\right]$$
$$+ns_y^2\left\{1 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2} - \frac{(s_x^2 s_{yz} - s_{xy}s_{xz})^2}{s_x^2 s_y^2(s_x^2 s_z^2 - s_{xz}^2)}\right\} \qquad \cdots④$$

よって, 重回帰において残差平方和を最小化するには, a,b,c を同時に以下のように定めることができれば良いことになる。

$$a=\bar{y}-b\bar{x}-c\bar{z},\ b=\frac{s_{xy}-cs_{xz}}{s_x^2},\ c=\frac{s_x^2s_{yz}-s_{xy}s_{xz}}{s_x^2s_z^2-s_{xz}^2}$$

このとき，残差平方和の最小値は④より次のような値となる。被説明変数を定数だけで説明する場合の最小二乗推定量は，被説明変数の平均 $\bar{y}$ となり，残差平方和 $\sum_{i=1}^n e_i^2$ の最小値は分散 s_y^2 の n 倍であることを前提にすると，この結果は重回帰で説明変数 x_i,z_i を追加して説明したことによって, 残差の最小値が定数のみによる説明の場合と比べ，小さくなっていることを示しており，この小さくなる倍率が重回帰の決定係数 R^2であることになる。決定係数の第２項の分母について，x_iとz_iの相関係数がマイナス１からプラス１の間の値をとることに配慮すれば，$s_x^2s_z^2$とs_{xz}^2の差は非負となることがわかるので，重回帰の決定係数は単回帰の決定係数以上の値となることもわかる。

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \geq ns_y^2\left\{1-\frac{s_{xy}^2}{s_x^2s_y^2}-\frac{\left(s_x^2s_{yz}-s_{xy}s_{xz}\right)^2}{s_x^2s_y^2(s_x^2s_z^2-s_{xz}^2)}\right\}$$

$$R^2=\frac{s_{xy}^2}{s_x^2s_y^2}+\frac{\left(s_x^2s_{yz}-s_{xy}s_{xz}\right)^2}{s_x^2s_y^2(s_x^2s_z^2-s_{xz}^2)}\geq\frac{s_{xy}^2}{s_x^2s_y^2}$$

因みに通分して，決定係数と相関係数との関係を確認すると次のとおり, 松原[56]に示されている結果を確認できる。

$$R^2=\frac{s_{xy}^2(s_x^2s_z^2-s_{xz}^2)+\left(s_x^2s_{yz}-s_{xy}s_{xz}\right)^2}{s_x^2s_y^2(s_x^2s_z^2-s_{xz}^2)}=\frac{s_{xy}^2s_x^2s_z^2+s_x^4s_{yz}^2-2s_x^2s_{xy}s_{yz}s_{xz}}{s_x^2s_y^2(s_x^2s_z^2-s_{xz}^2)}$$

$$=\frac{s_{xy}^2s_x^2s_z^2+s_x^4s_{yz}^2-2s_x^2s_{xy}s_{yz}s_{xz}}{s_x^4s_y^2s_z^2\left\{1-\left(\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{\left(\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\right)^2+\left(\frac{s_{yz}}{s_ys_z}\right)^2-2\left(\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\right)\left(\frac{s_{yz}}{s_ys_z}\right)\left(\frac{s_{xz}}{s_xs_z}\right)}{1-\left(\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\right)^2}$$

$$=\frac{r_{xy}^2+r_{yz}^2-2r_{xy}r_{yz}r_{xz}}{1-r_{xy}^2}$$

結　　語

初年次教育において避けることができない回帰分析について，多くの入門的教科書が採用している方法は，残差平方和を偏微分して得られる関数を０とおき，そこから得られた正規方程式の解として，最小二乗推定量を説明する方法である。経済学部を含む文科系学部の初年次教育で前提とする基礎学力として偏微分を要求することが難しいという実情に鑑みると，この方法による限り，最小二乗推定量の導出過程に関する説得力ある説明を行うことはできない。公式や解答パターンを丸暗記するという方法に頼る受講生を育てることにもつながりそうである。

本論文はこれを回避して，どのような方法が考えられるか，特に平方完成による方法について，どこまで説明に利用できるか検討した。まず，第１章で入門的教科書を複数取り上げて，最小二乗法の説明を確認した。教科書の説明方法は，①最小二乗法によれば，最小二乗推定量がどのように表せるかを示すに止め，その導出過程には触れないもの，②残差平方和が回帰式のパラメーターの二次関数となることに触れ，最小となるための必要条件として偏微分して得られる関数が０とならなければならないことを利用して正規方程式を導き，その方程式を解いて最小二乗推定量とするもの，③残差平方和を表す二次関数について，平方完成によって最小値を得るパラメーターを求めようというものの３種類に分類できることを示した。

第２章では，②の方法による場合，正規方程式から最小二乗推定量をどのように導出できるかを示した。導出に際しては，分散，共分散の性質を利用して，比較的見通しの良い連立方程式の解法を示すことができた。第１節で単回帰について，第２節で重回帰について解法を示している。第３節では，高校の学習指導要領の変更によって，今後はあまり利用できないかもしれないが，残差ベクトルと説明変数ベクトルが直交し，内積が０となる関係から，正規方程式が容易に導出できることを示した。

第３章では，残差平方和が二次関数であることから，平方完成により各パラメーターをどのように決めれば最小値を得られるかを確認した。計算は煩雑に見

えるが，各パラメーターについて降冪に整理した上で，平方完成を試みる定型的な作業を行っただけである。最小二乗推定量を求める作業はここまでであるが，最小値の変化に着目すれば，単回帰では説明変数と被説明変数の相関係数の２乗倍だけ小さくなっていることがわかる。周知のとおり単回帰の決定係数は相関係数の２乗倍となるが，平方完成の算式中に残差平方和の最小値が決定係数倍だけ小さくなることを明示できる。本論文では重回帰でも同様のことを試みた。重回帰の決定係数が単回帰の決定係数と比べ小さくなることはないということが，その結果から明示的に確認できた。

以上の検討から，平方完成による最小二乗推定量の導出方法は，決定係数の意味を推定量の導出過程と一体化したものとして，明瞭に示せる点で優れていることがわかった。決してお勧めできないというものではなく，残差平方和を偏微分して得られる関数を０とおいて得られる正規方程式の解が最小二乗推定量であるという一般的な理解を補う有用な方法であり，今後とも積極的に活用されるべきであろう。

参考文献

[1] 浅野晃『挫折しない統計学入門』オーム社，2017年1月
[2] 浅野昇『社会人1年生のための統計学教科書』SB クリエイティブ，2014年2月
[3] 阿部真人『統計学入門データ分析に必須の知識・考え方』ソシム株式会社，2022年8月
[4] 安藤洋美，門脇光也『初学者のための統計教室』現代数学社，2004年3月
[5] 石井満『経済・経営系の統計学』森北出版，1991年5月
[6] 石谷謙介『ガイダンス確率統計－基礎から学び本質の理解へ－』サイエンス社，2021年12月
[7] 石村園子『やさしく学べる統計学』共立出版，2006年6月
[8] 井上勝雄『新・よくわかる統計学の考え方』ミネルヴァ書房，2008年3月
[9] 岩崎学『統計的データ解析入門－単回帰分析－』東京図書，2006年6月
[10] 氏家勝巳，土井誠『統計数学序論』東京大学出版会，2005年3月
[11] R.J.ウォナコット，T.H.ウォナコット『計量経済学序説』培風館，1987 年 11 月
[12] 内山敏典，川口雅正，杉野元亮『基本計量経済学』現代経済学のコア，勁草書房，2006年3月
[13] 小澤誠一・齋藤政彦共編『データサイエンスの考え方』オーム社，2021年11月
[14] 大村平『統計解析のはなし』日科技連出版社，1992年3月
[15] 大野博道，岡本葵，河邊淳，鈴木章斗『確率・統計の基礎』培風館，2021年9月
[16] 大村平『統計解析のはなし』日科技連出版社，1992年3月
[17] 大屋幸輔『コア・テキスト統計学』経済学コア・テキスト，新世社，2003年2月
[18] 岡田泰栄『統計学概論』共立出版，2021年3月

[19] 笠原健一・宮野尚哉・長健一郎『データ科学の基礎』共立出版，2021年12月
[20] 角田保『Excel 統計学超入門』オーム社，2023年5月
[21] 金子治平，上藤一郎編『よくわかる統計学 I 基礎編』第2版，やわらかアカデミズム（わかる）シリーズ，ミネルヴァ書房，2013年3月
[22] 釜江哲朗『確率・統計の基礎』放送大学教育振興会，2005年10月
[23] 刈屋武昭，勝浦正樹『統計学』プログレッシブ経済学シリーズ，第2版，2008年8月
[24] 熊原啓作，渡辺美智子『身近な統計』放送大学教育振興会，2015年1月
[25] 久米均『統計解析への出発』シリーズ入門統計的方法，岩波書店，1989年3月
[26] 倉田博史，星野崇宏『入門統計解析』新世社，2009年12月
[27] 毛塚和宏『社会科学のための統計学入門－実例からていねいに学ぶ－』講談社，2022年6月
[28] 小寺平治『新統計入門』裳華房，2019年9月
[29] 小林道正『経済・経営のための統計教室－データサイエンス入門－』裳華房，2016年10月
[30] 滋賀大学データサイエンス学部･長崎大学情報学部共編『データサイエンスの歩き方』，学術図書出版社，2022年3月
[31] 篠崎信雄，竹内秀一『統計解析入門』第3版，サイエンス社，2020年12月
[32] 渋谷綾子『統計学入門』税務経理協会，2018年11月
[33] 清水誠『推測統計はじめの一歩』ブルーバックス B283，講談社，2000年3月
[34] 下川敏雄『実践のための基礎統計学』講談社，2016年10月
[35] 鈴木義一郎『はじめて学ぶ基礎統計学』森北出版，2006年5月
[36] 鈴木義也，吾妻一興，大野芳希，高木斉『統計学概説』培風館，1987年1月
[37] 盛山和夫『統計学入門』日本放送出版会，2007年2月
[38] 竹内清，佃義彦『経営統計学』有斐閣，1990年8月
[39] 竹内淳『高校数学でわかる統計学－本格的に理解するために－』ブルーバックス B-1757，講談社, 2012年2月
[40] 竹内広宜『経営・商学のために統計学入門』講談社，2021年9月
[41] 竹村彰通『統計』共立講座21世紀の数学14，共立出版，1997年3月
[42] 田中勝人『基礎コース統計学』新世社，1999年5月
[43] 田中隆一『計量経済学の第一歩』有斐閣ストゥディア，有斐閣，2015年11月
[44] 津村善郎，渕脇学，築林昭明『社会統計入門』第2版，東京大学出版会，2000年3月
[45] 鄭躍軍『スタンダード社会科学系の統計学』培風館，2022年1月
[46] 統計学教育研究会編『初歩から学べる確率・統計』共立出版，2011年3月
[47] 鳥居泰彦『はじめての統計学』日本経済新聞出版社，2007年5月
[48] 西田俊夫，田畑義雄『経済・経営の統計学』，培風館，1991年1月
[49] 永田靖『統計的方法のしくみ』日科技連，1996年10月
[50] 畑農鋭矢, 水落正明『データ分析をマスターする12のレッスン』有斐閣アルマ, 有斐閣, 2017年10月
[51] 原田明信『経済分析のための統計学入門－統計的推測の論理と数理－』第2版, 創成社, 2006年9月
[52] 平井孝之，福田亮治，楠田信『確率・統計入門』共立出版，2000年4月
[53] P.G.ホーエル『初等統計学』原書第4版，培風館，2003年2月
[54] ホーエル=ポート＝ストーン『統計理論入門』東京図書，1974年10月
[55] 前園宜彦『概説確率統計』第3版，サイエンス社，2018年10月
[56] 松原望『統計学』東京図書，2017年5月
[57] 松原望，松本渉『Excel ではじめる社会調査データ分析』丸善出版，2011年12月

[58] 松原望，森崎初男『経済データの統計学』オーム社，2020年4月
[59] 蓑谷千凰彦『統計学入門2』東京図書，1998年4月
[60] 丸茂幸平『基礎から学ぶ実証分析』第2版，新世社，2021年9月
[61] 水野勝之『テキスト計量経済学』中央経済社，2012年3月
[62] 宮川公男『基本統計学』第5版，有斐閣，2022年4月
[63] 宮川公男『計量経済学入門』日経文庫（63），日本経済新聞社，1972年2月
[64] 宮川公男，野々山隆幸，佐藤修『入門経営科学改訂版』実教出版，2022年2月
[65] J.C.ミラー『統計学の基礎』培風館，1988年11月
[66] 森田優三，久次智雄『新統計概論』改訂版，日本評論社，2004年4月
[67] 森棟公夫『統計学入門』第2版，新経済学ライブラリー9，新世社，2000年9月
[68] 森棟公夫，照井伸彦，中川満，西埜晴久，黒住英司『統計学』，有斐閣，2008年12月
[69] 山中馨，天谷永，望月雅光『EXCELで考える統計学』，創成社，2015年4月
[70] 安川正彬『統計学の手ほどき』日経文庫，日本経済新聞社，1974年12月
[71] 山田剛史，金森保智『エピソードで学ぶ統計リテラシー－高校から大学，社会へつながるデータサイエンス入門』北大路書房，2022年11月
[72] 脇本和昌『統計学見方・考え方』日評数学選書，日本評論社，1989年3月
[73] 湧井良幸，涌井貞美『統計学の図鑑』技術評論社，2015年6月
[74] 鷲尾泰彦『日常のなかの統計学』岩波書店，2015年3月
[75] 和達三樹，十河清『キーポイント確率・統計』理工系数学のキーポイント6，岩波書店，2017年9月