

# 産業動学に関する研究ノート (数値計算編) (1)

加 藤 浩

加藤 (2016) では、マルコフ完全産業動学 (Markov-perfect industry dynamics) の基本モデルである Ericson&Pakes モデルを取り上げ、モデルの構造とマルコフ完全ナッシュ均衡の性質について解説した。これを踏まえて、本稿では、Ericson&Pakes モデルの数値解析に焦点を当てた Pakes and McGuire (1994) のアルゴリズムについて解説していく。また、Pakes, Gowrisankaran and McGuire (1993) は、Pakes&McGuire アルゴリズムを実行するプログラムについて言及しているので、併せて解説する。コードは MATLAB<sup>®</sup>で記述する<sup>1)</sup>。

## 1. モデルの設定

### (1) モデルの設定

- ・ 離散無限期間において、企業の間で競争が展開される産業を考える。
- ・ 産業で収容できる最大の企業数は  $N$  社である。これを「 $N$ 社問題」と呼ぶことにする。
- ・ 割引因子は  $\beta$  である。

---

1) Pakes, Gowrisankaran and McGuire (1993) のコードは、C 言語および GAUSS で記述されていたが、現在入手できるコードは MATLAB<sup>®</sup>で記述されている。MATLAB<sup>®</sup>のコードは、以下のサイトから入手できる。

<https://scholar.harvard.edu/pakes/pages/pakes-maguire-algorithm-0>

また、R. Goettler により改良されたコードは次のサイトから入手できる。

[http://goettler.simon.rochester.edu/research/GG\\_QME\\_code/GG\\_QME\\_code.html](http://goettler.simon.rochester.edu/research/GG_QME_code/GG_QME_code.html)

- ・各企業は効率性パラメータ  $\omega$  を持っている。この効率性は確率的に決まり、企業ごとに値が異なるので、企業の異質性を表現する<sup>2)</sup>。
- ・産業で生産活動をしている既存企業は、退出するか、事業を継続するかのどちらかを毎期間決定する。
- ・事業を継続するときは、投資の支出額（投資水準） $x$  を決定する。
- ・退出するときは、直ちにスクラップ価値  $\phi$  を得る。退出する期間に関係なくスクラップ価値は一定である<sup>3)</sup>。
- ・潜在的な参入企業が存在し、既存企業の数  $N$  社未満であるときに限り参入が可能である。また毎期間、参入できる企業数は1社のみである<sup>4)</sup>。
- ・第  $t$  期に参入を決定した参入企業は、1期間待ってから、第  $t+1$  期の期初に効率性  $\omega^e$  が定まり、投資水準を決める。第  $t$  期には投資をせず、また利潤を得ることはない。
- ・参入費用  $x^e$  は、 $[x_L^e, x_H^e]$  上の一様分布に従う確率変数である<sup>5)</sup>。ただし  $x^e > \beta\phi$  とする。

## (2) 効率性パラメータについて

- ・実現可能な効率性の集合は  $\{0, 1, \dots, \bar{\omega}\}$  である。ただし  $N \leq \bar{\omega}$  とする。
- ・ $\omega$  の値が大きい効率性を持つ企業ほどより効率的である。
- ・毎期間、 $\omega$  の値は確率的に変動する。次期の効率性  $\omega'$  は、今期の効率性  $\omega$  と投資水準、および産業外部の要因に影響を受ける。次のような関係がある。

$$\omega' = \omega + \tau - \nu. \quad (1)$$

2) 具体的には、 $\omega$  は自社の需要（ベルトラン競争）、もしくは生産費用（クールノー競争）に影響を与える。

3)  $\phi$  は退出時に回収できる価値、あるいは代替的な選択肢に投資したときの収益と解釈できる。

4)  $m$  社が同時に参入するときの参入費用を  $x_m^e$  とするとき、 $x_1^e = x^e$ 、 $x_2^e = \infty$  としたケースであると解釈すればよい。

5) 参入費用がランダムに決まり、参入確率が連続的に変化するので、参入により既存企業の価値関数が不連続に変化することを回避でき、均衡値への収束の問題を解決する。

- ・ 確率変数  $\tau$  は企業間で独立に決まり、企業ごとに実現する値が異なる。 $\tau$  の値がどのような確率で実現するかは、投資水準  $x$  により決まる。この確率を  $\Pr(\tau|x)$  と表す。 $x$  と  $\Pr(\tau|x)$  の間に以下の関係が成立する<sup>6)</sup>。

$$\frac{\partial \Pr(\tau|x)}{\partial x} \begin{cases} < 0 \quad (\tau=0 \text{ のとき}) \\ > 0 \quad (\tau>0 \text{ のとき}), \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Pr(\tau|x)}{\partial x^2} < 0. \quad (3)$$

すなわち、ある  $\tau > 0$  について、投資支出が大きいほどその値が実現する確率は高まるが、効果は逓減的である。また、投資をしないときは確実に  $\tau = 0$  が実現する。つまり、

$$\Pr(\tau=0|x=0)=1. \quad (4)$$

- ・ 確率変数  $\nu$  は産業全体に影響を与えるショックで、どの企業についても同じ値が実現する。したがって、どの企業の効率性に対しても同じように影響を与えるので、効率性の変化が企業間で相関する要因となる<sup>7)</sup>。 $\nu$  が実現する確率を  $\Pr(\nu)$  とする。
- ・ 参入企業の効率性  $\omega$  は外生的に与えられる。この効率性も  $\nu$  の影響を受ける。また、参入決定時には投資をしないので、 $\tau=0$  である。したがって、参入企業の効率性は  $\omega - \nu$  となる。
- ・ 効率性 0 は空きスロット (empty slot) であり、その企業が産業で活動していないことを意味する。退出した企業の効率性は 0 となる<sup>8)</sup>。
- ・ 効率性が最大水準  $\bar{\omega}$  に達すると、投資をしないことが最適となる<sup>9)</sup>。したがって、効率性は  $\bar{\omega}$  を超えて上昇することはない。

6) クーン＝タッカー条件を満たす投資水準が、一意に定まるための条件である。

7) 具体的には、産業の外で販売される外部財 (outside goods) の品質が上昇したり、生産要素価格が上昇したりすることである。

8) 企業 2 が退出したときに企業 1 が得る利潤は、 $\pi(\omega_1, 0, 1) = \pi(\omega_1)$  と独占利潤になる。

9) Ericson and Pakes (1995) で証明されている。

- ・ 全企業が持つ効率性を並べたベクトル（配列） $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ を産業構造（industrial structure）と呼ぶ<sup>10)</sup>。 $\omega_n \in \{0, 1, \dots, \bar{\omega}\}$ は企業  $n$  の効率性である。
- ・  $(\boldsymbol{\omega}, n) = ((\omega_1, \dots, \omega_N), n)$ を、企業  $n \in \{1, \dots, N\}$ の状態（state）と呼ぶ。すなわち、産業構造と自社のインデックス（産業構造における自社の位置）の組み合わせである<sup>11)</sup>。
- ・ 政策（投資水準、参入、退出）は、状態 $(\boldsymbol{\omega}, n)$ によって決定される（マルコフ戦略）。

### （3）産業構造集合の制限

アルゴリズムは、すべての産業構造を巡回し、均衡における価値関数および投資関数の値を算出する。実現可能な産業構造の集合は $\{0, 1, \dots, \bar{\omega}\}^N$ であり、その濃度は $(\bar{\omega} + 1)^N$ である。したがって、計算量は  $N$  について指数関数的に増加する。そこで、数値計算の負担を軽減するために、実現可能な産業構造の集合を、

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_N) \mid \omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_N, \omega_i \in \{0, 1, \dots, \bar{\omega}\}\}. \quad (5)$$

と制限する<sup>12)</sup>。つまり、企業を効率的な順に並び替え、企業のインデックスが大きいくほど、より非効率的な企業とする<sup>13)</sup>。このとき産業構造集合の濃度は、

10) Ericson and Pakes（1995）では、効率性 $(0, 1, \dots, \bar{\omega})$ を持つ企業数の分布を産業構造としている。

11) 例えば、状態 $((7, 5, 5, 2), 3)$ について、自社は企業3であり、効率性は5である。

12) 企業  $n$  の価値関数や政策関数を一般的に $f_n(\boldsymbol{\omega})$ で表す。また、 $\omega_n = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_{n+1}, \dots, \omega_N)$ とする。 $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^N$ が対称であるとは、

$$f_n(\omega_n, \omega_{-n}) = f_n(\omega_n, \omega_{-n})$$

となることである。したがって、企業のインデックスを区別する必要がないので、 $f_n(\boldsymbol{\omega})$ を $f(\boldsymbol{\omega})$ と書くことができる。 $f(\omega_n, \omega_{-n})$ が匿名（交換可能）であるとは、 $-n$ の置換 $\pi(-n)$ について、

$$f(\omega_n, \omega_{-n}) = f(\omega_n, \omega_{\pi(-n)})$$

となることである。つまり、 $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_{n+1}, \dots, \omega_N)$ を並べ替えて $(\omega_{\pi(1)}, \dots, \omega_{\pi(n-1)}, \omega_{\pi(n+1)}, \dots, \omega_{\pi(N)})$ としても、関数の値は変わらない。価値関数や政策関数の対称性と匿名性を仮定すると、産業構造集合を(5)式のように制限することができる。企業の違いは、その企業の状態 $(\boldsymbol{\omega}, n)$ だけに集約される。

13) 例えば、 $((7, 5, 5, 2), 1)$ と $((2, 5, 7, 5), 3)$ は同じ状態であり、価値関数と投資関数は同じ値を出力する。

$$\begin{aligned} \#\Omega &= \frac{(N+\bar{\omega})!}{N!\bar{\omega}!} \\ &= \frac{(N+\bar{\omega})(N+\bar{\omega}-1)\cdots(N+2)(N+1)}{\bar{\omega}!} \sim N^{\bar{\omega}}. \end{aligned} \quad (6)$$

となり、計算量は  $N$  について多項式的に増加するに過ぎない。

## 2. アルゴリズム

### 2.1 アルゴリズム

Pakes&McGuire アルゴリズムは、状態  $(\boldsymbol{\omega}, n)$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$  について、1 期間の利潤関数  $\{\pi(\boldsymbol{\omega}, n)\}$  を入力して、マルコフ完全ナッシュ均衡が生成する価値関数の実現値  $\{V(\boldsymbol{\omega}, n)\}$  と投資関数 (政策関数) の実現値  $\{x(\boldsymbol{\omega}, n)\}$  を出力する<sup>14)</sup>。マルコフ完全ナッシュ均衡が生成する価値関数と投資関数とは、次の 2 つの条件を満たすものである。すべての状態  $(\boldsymbol{\omega}, n)$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$  について、i) 投資関数を所与として、価値関数  $V(\boldsymbol{\omega}, n)$  はベルマン方程式

$$V(\boldsymbol{\omega}, n) = \sup_{x_n} \pi(\boldsymbol{\omega}, n) - x_n + \beta E(V(\boldsymbol{\omega}', n) | x_1, \dots, x_N) \quad (7)$$

を満たす。ii) 価値関数を所与として、投資関数  $x(\boldsymbol{\omega}, n)$  は(7)式右辺に関するクーン＝タッカー条件を満たす。

産業構造ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  を巡回して均衡を求めることは計算の負担が大きいため、エンコード関数 `encode` により  $\boldsymbol{\omega}$  を自然数の定数  $z \in \{1, \dots, \bar{\omega}\}$  に変換し、 $z$  を巡回して計算する。ただし  $\bar{\omega} = \#\Omega$  である。各状態  $(z, n)$  に対して、エンコードされた産業構造  $z$  を行番号、企業のインデックス  $n$  を列番号とすることで、利潤関数は  $\Pi = \{\pi(z, n)\}$ 、価値関数は  $V = \{V(z, n)\}$ 、投資関数は  $X = \{x(z, n)\}$  と、行列 (2 次元配列) で扱うことができる。エンコードされた産業構造  $z$  は、デコード関数 `decode` により、産業構造ベクトル  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  に復元できる。

効率的に計算するために、問題を  $N$  社よりも少ない  $N_0$  ( $< N$ ) 社に制限し、そ

---

14) 例えば、 $V((12, 9, 9, 2, 1), 4)$  は産業構造  $(12, 9, 9, 2, 1)$  における企業 4 の価値関数であり、企業 4 の効率性は 2 となる。

のマルコフ完全ナッシュ均衡を求める。  $N_0 = 1$  からスタートして、  $N_0 = N$  に到達するまで、  $N_0$  社問題の均衡を求めるたびに企業数を 1 社ずつ増やして、新たに  $N_0 + 1$  社問題の均衡を求めていく。

$N_0$  社問題では、均衡値を反復法により求める。  $i$  回目の反復では次のような処理が施される。ある産業構造  $z \in \{1, \dots, \bar{w}\}$  において、企業  $n \in \{1, \dots, N_0\}$  が得る価値関数  $V(z, n)$  を考える。  $i - 1$  回目の反復で計算された価値関数の推測値  $V^{(i-1)}$  を、ベルマン方程式から構築される反復式

$$V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) = \sup_{x_n} \pi(\boldsymbol{\omega}, n) - x_n + \beta E(V^{(i-1)}(\boldsymbol{\omega}', n) | x_1, \dots, x_N) \quad (8)$$

に入力することで、その推測値を改良した新しい推測値  $V^{(i)}$  を出力する。具体的には、次のような処理がなされる。まず、(8) 式右辺で規定される期待割引現在価値を計算し、それを最大にする投資水準を求める。これが  $i$  回目の反復で導かれる投資関数の推測値である。さらに、最大化された期待割引価値を計算して、 $i$  回目の反復で導かれる価値関数の推測値とする。そして最後に、メモリに格納されている古い推測値  $V^{(i-1)}$  を、新しい推測値  $V^{(i)}$  に書き換える。この反復処理を何度も繰り返すことで、推測値が均衡値に収束する。収束した価値関数の値とそれを最大化する投資水準が、状態  $(z, n)$  の均衡値となる。

すべての状態について上述の反復を完了させ、 $z$  をデコードして  $\boldsymbol{\omega}$  に戻すことで、任意の状態  $(\boldsymbol{\omega}, n)$  に対する均衡価値および均衡投資水準が明らかになる。この対応関係が、マルコフ完全ナッシュ均衡が生成する価値関数と投資関数となる。

このようにして  $N_0$  社問題の均衡が求まると、次に  $N_0$  を  $N_0 + 1$  と増やして同様の処理を行う。その際、 $N_0$  社問題で得た均衡の価値関数と投資関数を、反復における初期推測として用いる。プログラムでは、関数 `update` を呼び出してこの処理を行う。

産業構造ごとに、すべての企業の均衡価値と均衡投資水準を求めることになるが、効率性の大きい企業から順番に行うと、計算の処理速度が向上する。産業構造集合  $\Omega$  の設定から  $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3 \geq \dots$  となるので、企業 1、企業 2、企業 3、……の順番で計算していく。反復式には他社の投資水準が含まれており、その予測が必要となる。  $i$  回目の反復では、予測を次のように設定する。企業  $n$  の反復式を

構築するとき、企業 1, ..., 企業  $n-1$  の投資水準は、すでに計算された  $i$  回目の反復における投資水準を用いる。他方、企業  $n+1$ , ..., 企業  $N_0$  の投資水準は、 $i-1$  回目の反復で得られた投資水準を用いる<sup>15)</sup>。

#### ・ 退出

複数企業の間には生じる様々な退出パターンをすべて考慮すると、複数均衡の問題を避けて通ることはできない。均衡の一意性を保証するために、退出政策を次のようなものに制限する。

退出政策：自社よりも高い効率性を持つ企業が退出するときは、自社も退出する。

この退出政策を前提とすると、すべての企業について退出決定を考えなくても、 $V = \phi$  となる企業のインデックスを見つけるだけで十分である。それよりも大きなインデックスを持つ企業は退出する。

#### ・ 参入

退出が完了した後の産業構造を  $\omega^\dagger$  として、産業で活動中の企業数を  $m(\omega^\dagger)$  とする。 $m(\omega^\dagger)$  は  $\omega^\dagger$  の要素の中で、値が正となる要素の個数である。ここで、 $m(\omega^\dagger) = N_0$  ならば参入は確実に起こらない。 $m(\omega^\dagger) < N_0$  ならば、ある確率で参入が発生する。つまり、既存企業の一部が退出しており、 $\omega^\dagger$  に空きスロット 0 がある限り、参入の可能性はある。ただし、空きスロットがいくつあろうとも、参入できる企業は 1 社のみである。参入企業は、自社以外の参入はないものと予想する。参入価値  $V^e(\omega^\dagger)$  を計算し、参入費用が  $x^e \leq V^e(\omega^\dagger)$  となるときに参入する。参入費用は確率変数であるから、参入が発生する確率が、

$$\lambda(\omega^\dagger) = \Pr(x^e \leq V^e(\omega^\dagger)) \quad (9)$$

---

15)  $i$  回目の反復では、他社の投資水準の予測として、 $x^{(i-1)}$ あるいは $x^{(i)}$ を使う。反復を繰り返すと、これらの推測値も均衡値に収束するので、ナッシュ均衡の概念と合致する。

と定まる。プログラムにおいて、この確率は関数 `chkentry` を呼び出すことで計算される<sup>16)</sup>。

・ 価値関数および投資関数の推測値

プログラムでは、関数 `contract` を 1 回呼び出すことで、反復が 1 回実行される。関数 `contract` は、各々の産業構造  $z \in \{1, \dots, \bar{w}\}$  に対して関数 `optimize` をその都度呼び出す。関数 `optimize` は、投資関数行列の第  $z$  行  $[x(z, 1), \dots, x(z, N_0)]$ 、および価値関数行列の第  $z$  行  $[V(z, 1), \dots, V(z, N_0)]$  を参照する。これらの配列には、前回の反復で算出された推測値が格納されている。これらの値を用いて、企業  $n \in \{1, \dots, N_0\}$  が産業構造  $z$  で得る期待割引現在価値  $\pi(z, n) + \beta EV(z', n)$  を計算し、それを最大にする投資水準を求める。この投資水準を均衡投資関数の新しい推測値とし、また最大化された期待割引現在価値を均衡価値関数の新しい推測値として、それぞれ投資関数行列の第  $z$  行と価値関数行列の第  $z$  行に上書きして、推測値を更新する。

また、関数 `optimize` は退出する企業を特定し、その企業の効率性を 0 と置いて産業構造を変更する（つまり  $\omega$  を  $\omega^\dagger$  に変える）。退出する企業が存在しなければ、産業構造はそのままにする（つまり  $\omega^\dagger = \omega$ ）。さらに、参入が発生したときの産業構造（ $\omega^\dagger$  の要素に  $\omega^\dagger$  を含める）と、参入が発生しなかったときの産業構造（ $\omega^\dagger$  に変更を加えない）を考え、それぞれの期待割引現在価値を計算する。前者は確率  $\lambda(\omega^\dagger)$  で、後者は確率  $1 - \lambda(\omega^\dagger)$  で実現するので、関数 `chkentry` を呼び出して参入確率  $\lambda(\omega^\dagger)$  を出力し、加重平均を取って期待値を計算する。

16)  $N_0 = 5$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$  の具体例で考える。企業 3 の価値関数が、

$$V((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5), 3) = \phi$$

となるならば、企業 3 は退出する。このとき、企業 4、企業 5 も退出する。したがって、退出が完了した後の産業構造は  $\omega^\dagger = (\omega_1, \omega_2, 0, 0, 0)$  となる。次期の産業構造は、確率  $\lambda(\omega^\dagger)$  で  $(\omega_1, \omega_2, \omega^\dagger, 0, 0)$ 、確率  $1 - \lambda(\omega^\dagger)$  で  $(\omega_1, \omega_2, 0, 0, 0)$  となる。



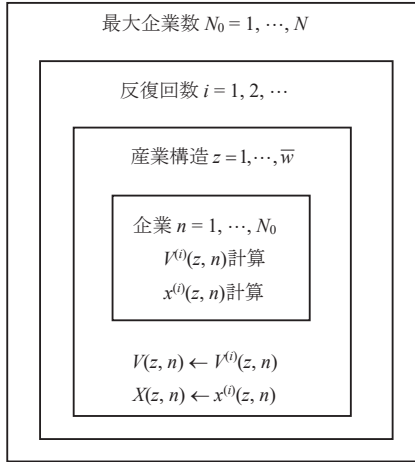


図1 アルゴリズムのループ構造

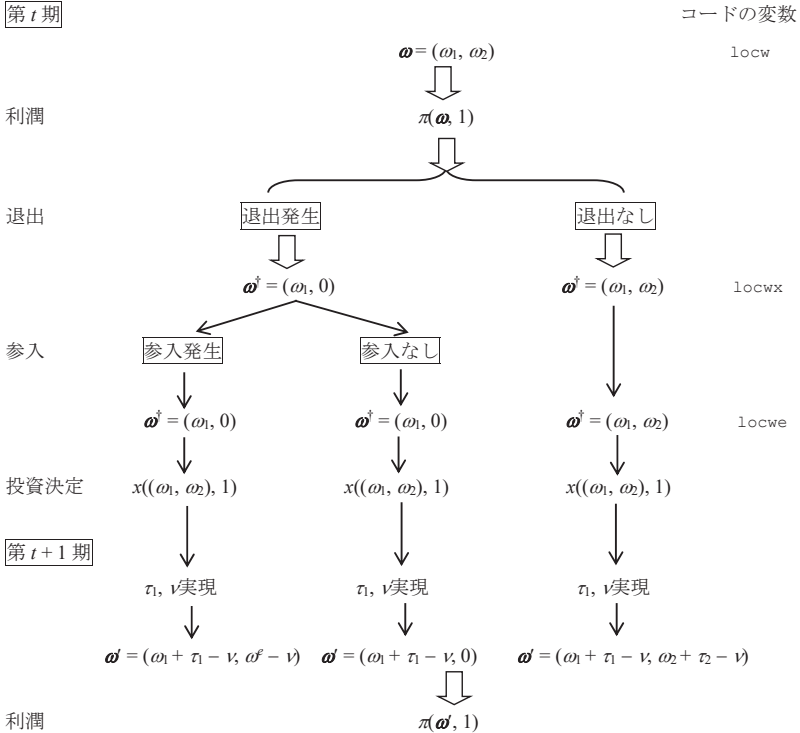


図2 2社問題における産業構造の変化

## 2.2 1 社問題

アルゴリズムは  $N_0 = 1$  からスタートする。独占企業が産業で活動しており，参入脅威はない。実現可能な産業構造は  $\Omega = \{0, 1, \dots, \bar{\omega}\}$  である。効率性  $\omega$  を持つ企業の 1 期間の独占利潤を  $\pi(\omega)$  とすると，ベルマン方程式は次のようになる<sup>17)</sup>。

$$V(\omega) = \text{Max}_x \{ \phi, \sup_x \pi(\omega) - x + \beta \sum_{\tau} \sum_{\nu} V(\omega + \tau - \nu) \Pr(\tau | x) \Pr(\nu) \} \equiv T_1 V \cdot \quad (10)$$

次期の効率性は，今期の効率性  $\omega$  と確率変数  $\tau, \nu$  によって決まり，さらに今期の投資水準  $x$  が次期の  $\tau$  の実現確率に影響を与える。(10) 式の右辺は， $\tau, \nu$  についての期待値を計算しており， $\tau, \nu$  に関する和は，そのサポートについて足し合わせる。 $\sup$  を達成する  $x$  が，効率性  $\omega$  に対する均衡投資関数  $x(\omega)$  となる。

$T_1$  はモジュール  $\beta$  の縮小写像であるから，

$$V^* = T_1 V^* \quad (11)$$

を満たす一意の不動点  $V^*$  が存在する。したがって，ベルマン方程式(10)の解  $V^*(\omega)$  がただ 1 つ存在する。この解が均衡価値関数となる。

数値計算では，不動点  $V^*$  を次の反復式を用いて求める。

$$V^{(i)} = T_1 V^{(i-1)} \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (12)$$

反復式の具体的な形は次式のようになる。

$$V^{(i)}(\omega) = \text{Max}_x \{ \phi, \sup_x \pi(\omega) - x + \beta \sum_{\tau} \sum_{\nu} V^{(i-1)}(\omega + \tau - \nu) \Pr(\tau | x) \Pr(\nu) \} \cdot \quad (13)$$

$\sup$  を達成する解を求めることで，均衡投資関数の推測値  $x^{(i)}(\omega)$  を得る。これを(13)式右辺に代入すると，均衡価値関数の推測値  $V^{(i)}(\omega)$  が導かれる。 $\omega = 0, 1, \dots, \bar{\omega}$  について， $x^{(i)}(\omega)$  と  $V^{(i)}(\omega)$  の値を求めていく。

$i \rightarrow \infty$  とすると  $V^{(i)} \rightarrow V^*$  となることから，反復回数を増やすほど，均衡価値関数の推測値  $V^{(i)}$  は真の値  $V^*$  に近づく。

次に反復の停止条件を考える。価値関数の距離を，

---

17) 状態  $(\omega, 1)$  を単に  $\omega$  と書くことにする。

$$\|V^{(i)} - V^{(i-1)}\|_{\infty} = \text{Max}_{\omega} |V^{(i)}(\omega) - V^{(i-1)}(\omega)| \quad (14)$$

と定義する。 $V^*$ と  $V^{(i)}$ との誤差が許容水準  $\varepsilon$ よりも小さくなれば、反復を停止する。すなわち、

$$\text{停止条件： } \|V^* - V^{(i)}\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (15)$$

となるならば、 $i$  回目の反復で計算を打ち切り、 $V^{(i)}$ を均衡価値関数の近似値とする。ここで、縮小写像定理より、次の関係式を得る (Stokey&Lucas (1989), Stachurski (2009))。

$$\|V^* - V^{(i)}\|_{\infty} \leq \frac{1}{1-\beta} \|V^{(i)} - V^{(i-1)}\|_{\infty}. \quad (16)$$

それゆえ、

$$\|V^{(i+1)} - V^{(i)}\|_{\infty} \leq \varepsilon(1-\beta) \quad (17)$$

であるならば、(15)式が満たされる。そこで、

$$\kappa = \varepsilon(1-\beta) \quad (18)$$

として、停止条件を以下の式に帰着させる。

$$\text{停止条件： } \|V^{(i)} - V^{(i-1)}\|_{\infty} \leq \kappa. \quad (19)$$

反復を停止したときに得られる均衡価値関数の推測値を  $V^{(\infty)}$ とする。また、この値を実現する投資水準を  $x^{(\infty)}$ とする。 $V^{(\infty)}$ ,  $x^{(\infty)}$ が、均衡価値関数と均衡投資関数の近似値となる。

最後に、反復の開始に当たり必要となる初期推測について述べる。価値関数の初期推測として、任意の有界関数を用いてもよい。例えば次のように設定する<sup>18)</sup>。

18) Pakes, Gowrisankaran and McGuire (1993) のコードでは、

$$V^{(0)}(\omega) \leftarrow 1 + 0.1\omega$$

としている。

$$V^{(0)}(\omega) \leftarrow \pi(\omega). \quad (20)$$

また、投資水準の初期推測を次のようにおく。

$$x^{(0)}(\omega) \leftarrow 0. \quad (21)$$

### 2.3 2社問題

次に  $N_0=2$  について考える。企業1の効率性を  $\omega_1$ 、企業2の効率性を  $\omega_2$  とする。 $\omega_1 \geq \omega_2$  である。企業1の価値関数  $V((\omega_1, \omega_2), 1)$  に関するベルマン方程式を考える。 $(\omega_1, \omega_2)$  の値に応じて、企業2が産業で活動する場合と、産業から退出する場合があります、それぞれの状況でベルマン方程式が異なる。また、企業2が退出するときは、参入の可能性を考慮する必要がある。企業2の価値関数が

$$V((\omega_1, \omega_2), 2) > \phi \quad (22)$$

となる  $(\omega_1, \omega_2)$  について、企業2は産業で活動している。他方、

$$V((\omega_1, \omega_2), 2) = \phi \quad (23)$$

となる  $(\omega_1, \omega_2)$  について、企業2は産業から退出する。このとき、 $\omega_2=0$  となるので、企業2の効率性は空きスロットとなり、参入の余地がある。

参入企業は参入を決定した期には利潤を得ず、また投資もしない。一方、企業1はその期に  $x((\omega_1, \omega_2), 1)$  の投資をしている。これらを勘案すると、参入価値は次のようになる。

$$V^e(\omega_1, 0) = \beta \sum_{\tau_1} \sum_{\nu} V((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega^e - \nu), 2) \Pr(\tau_1 | x((\omega_1, \omega_2), 1)) \Pr(\nu). \quad (24)$$

参入確率は、

$$\lambda(\omega_1, 0) = \Pr(x^e \leq V^e(\omega_1, 0)) \quad (25)$$

として求められる。次期の産業構造は、確率  $\lambda(\omega_1, 0)$  で  $\omega' = (\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega^e - \nu)$  となり、確率  $1 - \lambda(\omega_1, 0)$  で  $\omega' = (\omega_1 + \tau_1 - \nu, 0)$  となる。

以上を踏まえると、企業1のベルマン方程式は次のように場合分けができる。企業2が市場に留まるとき、すなわち、

$$(\omega_1, \omega_2) \in \{(\omega_1, \omega_2) \mid V((\omega_1, \omega_2), 2) > \phi\} \quad (26)$$

となる産業構造について、ベルマン方程式は、

$$V((\omega_1, \omega_2), 1) = \text{Max}\{\phi, \sup_x \pi((\omega_1, \omega_2), 1) - x + \beta \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \sum_{\nu} V((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega_2 + \tau_2 - \nu), 1) \Pr(\tau_1 | x) \Pr(\tau_2 | x_2) \Pr(\nu)\} \quad (27)$$

となる。企業2が産業から退出するとき、すなわち、

$$(\omega_1, \omega_2) \in \{(\omega_1, \omega_2) \mid V((\omega_1, \omega_2), 2) = \phi\} \quad (28)$$

となる産業構造について、確率  $\lambda(\omega_1, 0)$  で参入が発生し、ベルマン方程式は次のようになる。

$$V((\omega_1, \omega_2), 1) = \text{Max}\{\phi, \sup_x \pi(\omega_1, \omega_2) - x + \beta \sum_{\tau_1} \sum_{\nu} V((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega^e - \nu), 1) \Pr(\tau_1 | x) \Pr(\nu)\} \cdot \quad (29)$$

他方、確率  $1 - \lambda(\omega_1, 0)$  で参入は起こらず、ベルマン方程式は次式で与えられる。

$$V((\omega_1, \omega_2), 1) = \text{Max}\{\phi, \sup_x \pi(\omega_1, \omega_2) - x + \beta \sum_{\tau_1} \sum_{\nu} V((\omega_1 + \tau_1 - \nu, 0), 1) \Pr(\tau_1 | x) \Pr(\nu)\} \cdot \quad (30)$$

次に反復式を考える。 $i$  回目の反復では、期待割引現在価値の計算に  $V^{(i-1)}$  を使う。また、競合企業の投資水準に関する予測には  $x^{(i-1)}$  を用いる。まず参入価値は、

$$V^e(\omega_1, 0) = \beta \sum_{\tau_1} \sum_{\nu} V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega^e - \nu), 2) \Pr(\tau_1 | x^{(i-1)}((\omega_1, \omega_2), 1)) \Pr(\nu) \quad (31)$$

と計算される。

ベルマン方程式から構築される反復式を考える。指示関数を  $\mathbf{I}\{\cdot\}$  として、

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}\{(\omega_1, \omega_2) \mid V^{(i-1)}((\omega_1, \omega_2), 2) = \phi\} \quad (32)$$

とおく。また、企業2の投資水準に関する予測を以下に定める。

$$x_2 \leftarrow x^{(i-1)}((\omega_1, \omega_2), 2). \quad (33)$$

これより反復式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V^{(i)}((\omega_1, \omega_2), 1) &= \text{Max} \left\{ \phi, \sup_x \pi((\omega_1, \omega_2), 1) - x \right. \\
 &+ \beta \left\{ (1 - \mathbf{I}_1) \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \sum_{\nu} V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega_2 + \tau_2 - \nu), 1) \Pr(\tau_1 | x) \Pr(\tau_2 | x^{(i-1)}((\omega_1, \omega_2), 2)) \Pr(\nu) \right. \\
 &+ \left. \mathbf{I}_1 \sum_{\tau_1} \sum_{\nu} \left[ \lambda(\omega_1, 0) V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega^e - \nu), 1) + \{1 - \lambda(\omega_1, 0)\} V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, 0), 1) \right] \Pr(\tau_1 | x) \Pr(\nu) \right\} \\
 &\equiv T_2 V^{(i-1)}. \tag{34}
 \end{aligned}$$

均衡投資関数の推測値  $x^{(i)}$  は、以下のターン = タッカー条件を満たす。  $\mathbf{I}_1 = 0$  のとき、

$$\begin{aligned}
 x^{(i)} \left\{ \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \sum_{\nu} V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega_2 + \tau_2 - \nu), 1) \frac{\partial \Pr(\tau_1 | x^{(i)})}{\partial x} \Pr(\tau_2 | x^{(i-1)}((\omega_1, \omega_2), 2)) \Pr(\nu) - \frac{1}{\beta} \right\} = 0 \\
 \wedge x^{(i)} \geq 0. \tag{35}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{I}_1 = 1$  のとき、

$$\begin{aligned}
 x^{(i)} \left[ \sum_{\tau_1} \sum_{\nu} \left[ \lambda(\omega_1, 0) V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, \omega^e - \nu), 1) + \{1 - \lambda(\omega_1, 0)\} V^{(i-1)}((\omega_1 + \tau_1 - \nu, 0), 1) \right] \right. \\
 \left. \times \frac{\partial \Pr(\tau_1 | x^{(i)})}{\partial x} \Pr(\nu) - \frac{1}{\beta} \right] = 0 \wedge x^{(i)} \geq 0. \tag{36}
 \end{aligned}$$

(35) 式ないし (36) 式を満たす  $x^{(i)}((\omega_1, \omega_2), 1)$  を求めて、反復式 (34) 右辺の  $x$  に代入することで、均衡価値関数の推測値  $V^{(i)}((\omega_1, \omega_2), 1)$  を得る。 $V^{(i)} = \phi$  となるならば、企業 1 は産業から退出するので、 $x^{(i)}((\omega_1, \omega_2), 1) = 0$  と設定する。

反復式

$$V^{(i)} = T_2 V^{(i-1)} \tag{37}$$

について、 $i \rightarrow \infty$  とすると、 $V^{(i)}, x^{(i)}$  はマルコフ完全ナッシュ均衡が生成する価値関数と投資関数に収束する。停止条件 (19) が満たされるまで反復を繰り返す。反復

を打ち切ったときに得られた推測値  $V^{(\infty)}$ ,  $x^{(\infty)}$ を，マルコフ完全ナッシュ均衡が生  
成する価値関数と投資関数の近似値とする。

企業 1 の退出政策を

$$\chi((\omega_1, \omega_2), 1) = \begin{cases} 1 & (\text{継続}) \\ 0 & (\text{退出}) \end{cases} \quad (38)$$

とすると，均衡における退出政策は，

$$V^{(\infty)}((\omega_1, \omega_2), 1) > \phi \Rightarrow \chi((\omega_1, \omega_2), 1) = 1, \quad (39)$$

$$V^{(\infty)}((\omega_1, \omega_2), 1) = \phi \Rightarrow \chi((\omega_1, \omega_2), 1) = 0 \quad (40)$$

によって求められる。

初期推測として，1社問題で導かれた均衡価値関数  $V^{(\infty)}(\omega)$  と均衡投資関数  $x^{(\infty)}(\omega)$ を用いる。すなわち，

$$V^{(0)}((\omega_1, \omega_2), 1) \leftarrow V^{(\infty)}(\omega), \quad (41)$$

$$x^{(0)}((\omega_1, \omega_2), 2) \leftarrow x^{(\infty)}(\omega_2) \quad (42)$$

とする。

## 2.4 3社以上の問題

$N_0 = 3$  について考える。アルゴリズムは  $N_0 = 2$  のケースと同様である<sup>19)</sup>。初期推測として，2社問題で得られた均衡価値関数と均衡投資関数の近似値を用いる。価値関数の初期推測を，

$$V^{(0)}((\omega_1, \omega_2, \omega_3), n) \leftarrow V^{(\infty)}((\omega_1, \omega_2), n) \quad (n=1, 2), \quad (43)$$

$$V^{(0)}((\omega_1, \omega_2, \omega_3), 3) \leftarrow V^{(\infty)}((\omega_1, \omega_3), 2) \quad (44)$$

---

19)  $\omega^* = (\omega_1, 0, 0)$  のとき， $\Omega$  の性質から，参入が起ると  $\omega^* = (\omega_1, \omega^*, 0)$  となる。

とし、競合企業の投資水準について、初期推測を、

$$x^{(0)}((\omega_1, \omega_2, \omega_3), n) \leftarrow x^{(\infty)}((\omega_1, \omega_2), n) \quad (n=1, 2), \quad (45)$$

$$x^{(0)}((\omega_1, \omega_2, \omega_3), 3) \leftarrow x^{(\infty)}((\omega_1, \omega_3), 2) \quad (46)$$

とする。

一般的に、 $N_0$ 社問題では、 $N_0 - 1$ 社問題で導かれた均衡価値関数  $V^{(\infty)}$ を初期推測として用いる。すなわち、

$$V^{(0)}(\boldsymbol{\omega}, n) \leftarrow \begin{cases} V^{(\infty)}((\omega_1, \dots, \omega_{N_0-1}), n) & (n < N_0 \text{ のとき}) \\ V^{(\infty)}((\omega_1, \dots, \omega_{N_0-2}, \omega_{N_0}), n-1) & (n = N_0 \text{ のとき}) . \end{cases} \quad (47)$$

投資関数も同様に、

$$x^{(0)}(\boldsymbol{\omega}, n) \leftarrow \begin{cases} x^{(\infty)}((\omega_1, \dots, \omega_{N_0-1}), n) & (n < N_0 \text{ のとき}) \\ x^{(\infty)}((\omega_1, \dots, \omega_{N_0-2}, \omega_{N_0}), n-1) & (n = N_0 \text{ のとき}) . \end{cases} \quad (48)$$

また、企業  $n$  の期待割引現在価値を計算するとき、競合企業  $k$  の投資水準  $x_k$  に関する予測を次のように設定する。

$$x_k \leftarrow \begin{cases} x^{(i)}((\omega_1, \dots, \omega_{N_0}), k) & (k = 1, \dots, n-1) \\ x^{(i-1)}((\omega_1, \dots, \omega_{N_0}), k) & (k = n+1, \dots, N_0) . \end{cases} \quad (49)$$

### 3. 産業構造のコーディング

#### 3.1 産業構造のエンコード

産業構造ベクトル  $(\omega_1, \dots, \omega_N)$  を自然数の定数にエンコードする。エンコードされた値は産業構造のインデックスとして用いられる。コーディングの方法として、二項エンコーディング法 (binomial encoding scheme) を採用する。

二項係数行列 Binom を次のように定義する<sup>20)</sup>。

---

20)  $0! = 1$  とする。





となるようにエンコードする。さらに次のようにおく。

$$\bar{w} = \#\Omega. \quad (57)$$

エンコード関数は  $\text{enc} : \Omega \rightarrow D$  であり、 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  を  $z \in D$  に対応させる。Binom を用いて、エンコード関数を以下のように設定する。 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)$  に対して、

$$\text{enc}(\boldsymbol{\omega}) = 1 + \sum_{j=1}^N \text{Binom}(\omega_j + N - j + 1, \omega_j + 1). \quad (58)$$

このエンコード関数は、各  $\omega_1, \dots, \omega_N$  に対して次のような処理を行うことで、自然数を出力する。企業  $N$  の効率性  $\omega_N$  は  $\text{Binom}(\omega_N + 1, \omega_N + 1)$  に対応させ、企業  $N - 1$  の効率性  $\omega_{N-1}$  は  $\text{Binom}(\omega_{N-1}, \omega_{N-1} + 1)$  に対応させ、……、企業  $1$  の効率性  $\omega_1$  は  $\text{Binom}(\omega_1 + N, \omega_1 + 1)$  を対応させる。つまり、ある水準の効率性  $\omega$  に対応する要素はすべて Binom の第  $\omega + 1$  列に含まれている<sup>21)</sup>。そのうち企業  $n$  は対角成分  $\text{Binom}(\omega + 1, \omega + 1)$  から  $N - n$  行だけ下にある要素に対応させる。これらをすべて足し合わせて、さらに  $1$  を加えることで、エンコードした自然数を出力する<sup>22)</sup>。

### 3.2 産業構造のデコード

エンコード関数 (58) は全単射であることが証明されている (Pakes, Gowrisankaran, and McGuire (1993))。つまり、ある  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  に対してただ  $1$  つの自然数  $z \in D$  が対応し、任意の自然数  $z \in D$  に対して  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  が存在して  $\text{enc}(\boldsymbol{\omega}) = z$  となる。関数  $\text{enc}$  が全単射ならば、自然数  $z \in D$  を産業構造ベクトル  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  に写す逆写像が存在する。したがって、逆関数  $\text{enc}^{-1}$  がデコード関数であり、 $\text{enc}^{-1}(z) = \boldsymbol{\omega}$  となる。

自然数  $z$  のデコーディングは、次の手続きにより実行される。まず、 $z$  から  $1$  を引いて<sup>23)</sup>,

21)  $\omega$  に  $1$  を足すのは、効率性  $0$  を Binom の第  $1$  列に対応させるためである。

22)  $\Sigma \text{Binom}(\omega_j + N - j + 1, \omega_j + 1)$  は、すべての  $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$  を  $w \in \{0, \dots, \bar{w} - 1\}$  に写す。MATLAB<sup>®</sup> では、配列は  $1$  からインデックスが始まるので、 $1$  を足して  $w \in \{1, \dots, \bar{w}\}$  とする。

23) エンコーディングで、 $\Sigma \text{Binom}(\omega_j + N - j + 1, \omega_j + 1)$  に  $1$  を足したので、デコーディングではエンコードされた値から  $1$  を引く。

$$\omega_1 = \text{Max}\{x \mid \text{Binom}(x + N, x + 1) \leq z - 1\} \quad (59)$$

なる整数  $x$  を見つける。つまり、 $\text{Binom}(N, 1), \text{Binom}(N + 1, 2), \text{Binom}(N + 2, 3), \dots$  のうち、値が  $z - 1$  より大きくなならない要素で、最大の値をとるものを見つめる。この整数を  $\omega_1$  とし、最大の値を  $\text{Binom}(\omega_1 + N, \omega_1 + 1)$  とする。次に、

$$z_1 = z - 1 - \text{Binom}(\omega_1 + N, \omega_1 + 1) \quad (60)$$

として、

$$\omega_2 = \text{Max}\{x \mid \text{Binom}(x + N - 1, x + 1) \leq z_1\} \quad (61)$$

と定める。同様にして、

$$z_2 = z_1 - \text{Binom}(\omega_2 + N - 1, \omega_2 + 1) \quad (62)$$

として、

$$\omega_3 = \text{Max}\{x \mid \text{Binom}(x + N - 2, x + 1) \leq z_2\} \quad (63)$$

と定める。これを繰り返して、

$$z_{N-1} = z - 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \text{Binom}(\omega_j + N - j + 1, \omega_j + 1), \quad (64)$$

$$\omega_N = \text{Max}\{x \mid \text{Binom}(x + 1, x + 1) \leq z_{N-1}\} \quad (65)$$

と定める。こうして、デコードされた産業構造  $(\omega_1, \dots, \omega_N)$  を得る。

プログラムでは、計算の効率を上げるため、ルックアップ・テーブル `etable`, `dtable` を用いてコーディングをする<sup>24)</sup>。`etable` は  $(\bar{\omega} + 1)^N$  次元ベクトルであり、 $(\bar{\omega} + 1)^N$  個の産業構造ベクトルを関数 `encode` でエンコードした値を格納する<sup>25)</sup>。

24) ルックアップ・テーブルとは、計算の効率化のために使用する配列である。あらかじめ先に計算をしておき、その計算結果を配列に保存しておく。ルックアップ・テーブルを使用することにより、複雑な計算を避けて、配列の参照という単純な作業で代替できる。

25) 産業構造  $(\omega_1, \dots, \omega_N)$  と、それを並べ替えた ( $\Omega$  の要素ではない) 産業構造  $(\omega_{\pi(1)}, \dots, \omega_{\pi(N)})$  は、エンコード関数に入力すると同じ値が出力されるが、`etable` では異なる場所に格納される。

dtable は  $N \times \#\Omega$  行列であり，自然数  $z$  を関数 decode でデコードした  $N$  次元ベクトルを dtable( $\cdot, z$ ) に格納する。

#### 4. 確率分布の特定化

数値計算を実行するためには， $\tau$  と  $\nu$  の確率分布を特定化する必要がある。 $\nu, \tau$  のサポートを  $\nu \in \{0, 1\}$ ， $\tau \in \{0, 1\}$  とする。したがって，今期の効率性が  $\omega$  のとき，次期の効率性  $\omega'$  は以下の値を取る。

$$\omega' = \omega + \tau - \nu = \begin{cases} \omega - 1 & ((\tau, \nu) = (0, 1) \text{ のとき}) \\ \omega & ((\tau, \nu) = (0, 0), (1, 1) \text{ のとき}) \\ \omega + 1 & ((\tau, \nu) = (1, 0) \text{ のとき}) . \end{cases} \quad (66)$$

$\tau$  の確率分布を次のように設定する<sup>26)</sup>。

$$\Pr(\tau | x) = \begin{cases} \frac{ax}{1+ax} & (\tau = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{1+ax} & (\tau = 0 \text{ のとき}) . \end{cases} \quad (67)$$

$a$  は投資の効果を示す定数である。この確率分布は，

$$\Pr(\tau = 0 | x = 0) = 1, \quad (68)$$

$$\Pr(\tau = 1 | x = 0) = 0 \quad (69)$$

を満たす。 $\nu$  の確率分布を次のように設定する。

$$\Pr(\nu) = \begin{cases} \delta & (\nu = 1 \text{ のとき}) \\ 1 - \delta & (\nu = 0 \text{ のとき}) . \end{cases} \quad (70)$$

ただし， $\delta \in [0, 1]$  である<sup>27)</sup>。

26)  $\frac{\partial \Pr(\tau=1|x)}{\partial x} > 0$ ,  $\frac{\partial \Pr(\tau=0|x)}{\partial x} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Pr(\tau|x)}{\partial x^2} < 0$  が満たされるように確率を特定化する。

27) 参入企業の効率性は， $\omega'$  か  $\omega' - 1$  のどちらかに定まる。

反復式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) = & \text{Max} \left\{ \phi, \sup_x \pi(\boldsymbol{\omega}, n) - x \right. \\
 & + \beta \sum_{\tau_1=0}^1 \cdots \sum_{\tau_N=0}^1 \sum_{v=0}^1 [\lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger) V^{(i-1)}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \omega^e \mathbf{e}_{n_e} + \boldsymbol{\tau} - v\mathbf{i}, n) + \{1 - \lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger)\} V^{(i-1)}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \boldsymbol{\tau} - v\mathbf{i}, n)] \\
 & \left. \times \Pr(\tau_1 | x_1^{(i)}) \times \cdots \times \Pr(\tau_{n-1} | x_{n-1}^{(i)}) \times \Pr(\tau_n | x) \times \Pr(\tau_{n+1} | x_{n+1}^{(i-1)}) \times \cdots \times \Pr(\tau_N | x_N^{(i-1)}) \Pr(v) \right\}. \quad (71)
 \end{aligned}$$

ここで、 $n_e$  は参入企業のインデックスであり、

$$n_e = m(\boldsymbol{\omega}^\dagger) + 1 \quad (72)$$

を満たす。また、

$$\boldsymbol{\omega}^\dagger = (\omega_1, \dots, \omega_{n_e-1}, 0, \dots, 0) \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{n_e} = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad (74) \\
 \uparrow \\
 n_e \text{ 番目}
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_{n_e-1}, 0, \dots, 0) \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i} = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad (76) \\
 \underbrace{\hspace{2cm}}_{n_e \text{ 個}}
 \end{aligned}$$

である。退出が起らないときは、(71)式の反復式について、 $\boldsymbol{\omega}^\dagger = \boldsymbol{\omega}$ とする。また、 $m(\boldsymbol{\omega}^\dagger) = N_0$ のときは $\lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger) = 0$ とする。

自社の確率をマスク処理して、他社の確率について期待値を取った価値を次のように定義する<sup>28)</sup>。

---

28) この場合のマスク処理は、自社の確率には0をかけて、他社の確率には1をかけるものである。マスク処理をされた期待値は、前者は取り除いて後者だけをかけ合わせて計算される。

$$\begin{aligned} \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger, n) = & \sum_{\tau_1=0}^1 \cdots \sum_{\tau_{n-1}=0}^1 \sum_{\tau_n=0}^1 \cdots \sum_{\tau_N=0}^1 \sum_{v=0}^1 [\lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger) V^{(i-1)}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \omega^e \mathbf{e}_e + \boldsymbol{\tau} - v\mathbf{i}, n) + \{1 - \lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger)\} V^{(i-1)}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \boldsymbol{\tau} - v\mathbf{i}, n)] \\ & \times \Pr(\tau_1 | x_1^{(i)}) \times \cdots \times \Pr(\tau_{n-1} | x_{n-1}^{(i)}) \times \Pr(\tau_n | x_{n+1}^{(i-1)}) \times \cdots \times \Pr(\tau_N | x_N^{(i-1)}) \Pr(v) \end{aligned} \quad (77)$$

(71) 式は次のように書き換えられる。

$$V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) = \text{Max}_x \left\{ \phi, \sup_x \pi(\boldsymbol{\omega}, n) - x + \beta \left[ \frac{ax}{1+ax} \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \mathbf{e}_n, n) + \frac{1}{1+ax} \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger, n) \right] \right\}. \quad (78)$$

ターン = タッカー条件より，投資関数  $x(\boldsymbol{\omega}, n)$  は次のように計算される。

$$\begin{aligned} x(\boldsymbol{\omega}, n) = \arg_x \left\{ \beta \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{ax}{1+ax} \right) \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \mathbf{e}_n, n) + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+ax} \right) \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger, n) \right] = 1 \right\} \\ \wedge x(\boldsymbol{\omega}, n) \geq 0. \end{aligned} \quad (79)$$

ここで， $\tau$  が上昇する確率を

$$p(x) = \frac{ax}{1+ax} \quad (80)$$

とおくと，

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{ax}{1+ax} \right) = a(1-p(x))^2, \quad (81)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+ax} \right) = -a(1-p(x))^2. \quad (82)$$

さらに，自社の効率性が増加するとき，増加しないときの  $\text{Calcval}$  をそれぞれ次のようにおく。

$$v_1 = \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \mathbf{e}_n, n), \quad (83)$$

$$v_2 = \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger, n). \quad (84)$$

このように設定すると，(79) 式は次のように書き換えられる。

$$x(\boldsymbol{\omega}, n) = \arg\{ \beta a (1 - p(x))^2 (v_1 - v_2) = 1 \} \wedge x(\boldsymbol{\omega}, n) \geq 0. \quad (85)$$

$\arg$  の中を次のように変形する。

$$p(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{\beta a (v_1 - v_2)}} \equiv p. \quad (86)$$

(80)式より,

$$x = \frac{p(x)}{a - ap(x)}. \quad (87)$$

(86)式, (87)式を満たす  $x$  が均衡投資関数の推測値となる。

ここで,

$$r = \frac{1}{\beta a (v_1 - v_2)} \quad (88)$$

とおくと, (86)式は,

$$p(x) = 1 - \sqrt{r} \quad (89)$$

となる。投資水準を求めるアルゴリズムでは, まず(88)式に従って  $r$  を求めてから, (89)式により  $p$  を計算し, これを(87)式に代入して,

$$x(\boldsymbol{\omega}, n) = \frac{p}{a - ap} \quad (90)$$

とする。この値を(78)式の  $x$  に代入すると,

$$V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) = \text{Max} \left\{ \phi, \sup_x \pi(\boldsymbol{\omega}, n) - x(\boldsymbol{\omega}, n) + \beta \left[ \frac{ax(\boldsymbol{\omega}, n)}{1 + ax(\boldsymbol{\omega}, n)} \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \mathbf{e}_n, n) + \frac{1}{1 + ax(\boldsymbol{\omega}, n)} \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger, n) \right] \right\}. \quad (91)$$

$V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) = \phi$  となるときは企業  $n$  は退出するので, 均衡投資関数の推測値を 0 とする。それ以外は, (90)式で計算された  $x(\boldsymbol{\omega}, n)$  を均衡投資関数の推測値とする。よって,

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I} \{ \boldsymbol{\omega} \mid V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) = \phi \} \quad (92)$$

とおくと、

$$x^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) \leftarrow (1 - \mathbf{I}_2)x(\boldsymbol{\omega}, n) \quad (93)$$

と代入する。全企業について上記の計算を行い、

$$X(z, n) \leftarrow x^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) \quad (n = 1, \dots, N), \quad (94)$$

$$V(z, n) \leftarrow V^{(i)}(\boldsymbol{\omega}, n) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (95)$$

と投資関数行列および価値関数行列に代入する。ただし、 $z = \text{enc}(\boldsymbol{\omega})$ とする。さらに、すべての産業構造について同様の計算して、結果を投資関数行列  $X$  と価値関数行列  $V$  の各行に代入する。古い推測値が格納されていた  $X, V$  に新しい推測値が上書きされ、こうして  $i$  回目の反復が完了する。

参入価値は次のようになる。

$$V^e(\boldsymbol{\omega}^\dagger) = \beta \text{Calcval}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \omega^e \mathbf{e}_{n_e}, n_e), \quad (96)$$

$$\lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \omega^e \mathbf{e}_{n_e}) = 0. \quad (97)$$

すなわち、

$$V^e(\boldsymbol{\omega}^\dagger) = \beta \sum_{\tau_1=0}^1 \dots \sum_{\tau_{n_e-1}=0}^1 \sum_{\nu=0}^1 V^{(i-1)}(\boldsymbol{\omega}^\dagger + \omega^e \mathbf{e}_{n_e} + \boldsymbol{\tau} - \nu \mathbf{i}, n_e) \times \Pr(\tau_1 | x_1^{(i-1)}) \times \dots \times \Pr(\tau_{n_e-1} | x_{n_e-1}^{(i-1)}) \Pr(\nu). \quad (98)$$

$V^e = V^e(\boldsymbol{\omega}^\dagger)$ とおくと、 $x^e \sim \text{uni}[x_L^e, x_H^e]$ であるから、

$$\Pr(x^e \leq V^e) = \int_{x_L^e}^{V^e} \frac{1}{x_H^e - x_L^e} dz = \frac{V^e - x_L^e}{x_H^e - x_L^e}. \quad (99)$$

参入確率は、

$$\lambda(\boldsymbol{\omega}^\dagger) = \min \left\{ \text{Max} \left\{ \frac{V^e - x_L^e}{x_H^e - x_L^e}, 0 \right\}, 1 \right\} \quad (100)$$

と計算される。

(続く)



## 参考文献

- [1] Doraszelski, U. and A. Pakes. (2007), “A Framework for Applied Dynamic Analysis in IO”, In Armstrong, M. and R. Porter. (eds.), *Handbook of Industrial Organization: Volume 3*, North-Holland, pp.1887–1966.
- [2] Ericson, R. and A. Pakes. (1995), “Markov-Perfect Industry Dynamics: A Framework for Empirical Work.”, *Review of Economic Studies*, Vol.62, pp.53–82.
- [3] Goettler, R. and B. Gordon. (2014), “Competition and Product Innovation in Dynamic Oligopoly.”, *Quantitative Marketing Economics*, Vol.12, pp.1–42.
- [4] Judd, K. (1998), *Numerical Methods in Economics*, MIT Press.
- [5] Pakes, A., G. Gowrisankaran., and P. McGuire. (1993), “Implementing the Pakes-McGuire Algorithm for Computing Markov Perfect Equilibria in Gauss”, Working Paper, Yale University.
- [6] Pakes, A. and P. McGuire. (1993) “Computing Markov-Perfect Nash Equilibria: Numerical Implications of a Dynamic Differentiated Product Model.”, *RAND Journal of Economics*, Vol.25, pp.555–589.
- [7] Stachurski, J. (2009), *Economic Dynamics: Theory and Computation*, MIT Press.
- [8] Stokey, N. and R. Lucas, Jr. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.
- [9] 加藤浩 (2016) 「産業動学に関する研究ノート（理論編）」『経済学論集（西南学院大学）』第50巻第4号, pp. 19–68.