西南学院大学　人間科学論集　第 16 巻　第 1 号　　203 ― 213 頁　2020 年 8 月

＜研究ノート＞

和が等しくなるような自然数列の区切り方について

安　　楽　　和　　夫

On the Sequences of Divided natural Numbers with Same Sum

Kazuo Anraku

1　はじめに

自然数列について，次のような性質が知られている：

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{1+2}_{2\text{個}}=\underbrace{3}_{1\text{個}}\,;\\
&\underbrace{4+5+6}_{3\text{個}}=\underbrace{7+8}_{2\text{個}}\,;\\
&\underbrace{9+10+11+12}_{4\text{個}}=\underbrace{13+14+15}_{3\text{個}}\,;\\
&\underbrace{16+17+18+19+20}_{5\text{個}}=\underbrace{21+22+23+24}_{4\text{個}}\,;\\
&\cdots,
\end{aligned}
$$

1 から始まる 2 個の自然数の和と次の「3」が等しく，次の 4 から始まる 3 個の自然数の和と続く 2 個の自然数の和が等しい．さらに続く 4 個の自然数の和とその後に続く 3 個の自然数の和が等しいという関係が認められる．このような規則性は印象的であるし，自分でこのような規則性を見つけたら，深く記憶に刻まれるだろう．この例の区切られた一連の自然数列の規則性などは，その理由はともかく，算数の授業等でのトピックとしてとりあげると，児童らの興味をかきたてるのではなかろうか．

著者自身はこのような性質がどれだけ一般に知られているのか不案内であ

る．著者がこの性質を知ったのは，2017 年 8 月に和歌山市で開催された第 99 回全国算数・数学教育研究（和歌山）大会の講習会での矢部敏明氏（鳥取大学）の講演「協同的問題解決の学習様式～課題の発見と対話の様相に焦点を当てて～」においてであった．矢部氏は，講演の中で算数教育における心理的な側面に関連してこのトピックをとりあげられた．関係自体は，数列の和の計算で確かめられる問題であるが，興味深いトピックなので，数列などの初等的な文献をいくつかあたってみた結果，Nielsen［1］と一松（[2]，[3]）のものが確認できた．［1］ではこの性質についての視覚的な理解に基づく説明が与えてある．また［2］と［3］では，数列としての性質が論じてある．また［3］ではこのような数列を「台形数」と呼んでいる．しかし，いずれの文献もそれ以上に一般的な場合について論じてあるものではなかった．

ここでは，自然数列の和が等しくなるような区切り方について，もう少し一般的な条件で調べてみたので，その結果を備忘として記しておく．

2　和が等しくなるような自然数列の区切り方について

自然数 n から始まる k 個の和とその後に続く l 個の和が等しいという関係を式にすると，

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k-1)$$
$$=(n+k)+(n+k+1)+\cdots+(n+k+l-1) \tag{1}$$

となる．ただし，$k \geqq 2$ である．また明らかに $k > l$ でなければならない．(1) より

$$kn+\frac{1}{2}k(k-1)=l(n+k)+\frac{1}{2}l(l-1) \tag{2}$$

である．前節で挙げた例では，$l=k-1$ であるから，この式は特に

$$kn+\frac{1}{2}k(k-1)=(k-1)(n+k)+\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$$

となる．これより n と k の関係

$$n=(k-1)^2 \tag{3}$$

が得られる．

この関係（3）を用いると，

$$(k-1)^2+\{(k-1)^2+1\}+\cdots\{(k-1)^2+(k-1)\}=k(k-1)^2+\frac{1}{2}k(k-1)$$

$$=\frac{1}{2}k(k-1)(2k-1) \tag{4}$$

となる．これは，自然数 1 から $k-1$ までの和

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-1) \qquad (k\geqq 2)$$

の $2k-1$ 倍である．また平方和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2=\frac{1}{6}k(k-1)(2k-1) \qquad (k\geqq 2)$$

の 3 倍となっている（[1]，[2]）．

上の n と k の関係は，次の

$$n+k+(k-1)=(k-1)^2+2k-1=k^2$$

から始まる，$k+1$ 個と k 個からなる数列の区切りに続いていく．

いま数列を次のように区切る．

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	
1 2	3	4 5 6	7 8	9 10 11 12	13 14 15	16 17 18 19 20	21 22 23 24	$\cdots$
2 個	1 個	3 個	2 個	4 個	3 個	5 個	4 個	
(3)	(3)	(15)	(15)	(42)	(42)	(90)	(90)	

なお最下段の括弧の中の数は区切られた数列の和である．

A_i と B_i で区切られる数の個数をそれぞれ k_i，l_i（$i=1, 2, 3, \ldots$）とおくと，

$$k_i=i+1,\quad l_i=i \quad (i=1, 2, 3, \ldots,) \tag{5}$$

である（以下では，添字 i で表される範囲の表記は省略する）．また A_i で区切られる数列の最初の数を n_i とおくと，（3）や（5）より

$$n_i=i^2$$

である．また A_i で区切られる数の和と B_i で区切られる数の和をそれぞれ u_i，v_i とおくと，（4）と（5）より

$$u_i = v_i = \frac{1}{2}k_i(k_i-1)(2k_i-1) = \frac{1}{2}i(i+1)(2i+1)$$

となる．また

$$u_i - u_{i-1} = v_i - v_{i-1} = 3i^2$$

が確かめられる．

上の例では，数列 $\{k_i\}$，$\{l_i\}$ は公差 1 の等差数列である．この一般化として，公差が 2 以上の場合を考える．公差を d とする．なお後でわかるように，n_1 を含む A_1 の最初のいくつかは負の数や 0 を含めるようにした方が自然である．さて A_i で区切られるのは，n_i から n_i+k_i-1 までの k_i 個の自然数であり，B_i で区切られるのは，続く n_i+k_i から $n_i+k_i+l_i-1$ までの l_i 個の自然数である．ここで，

$$k_i = k_{i-1} + d,\quad l_i = l_{i-1} + d$$

とする．初項をそれぞれ k_1，l_1 とすると，一般項はそれぞれ

$$k_i = k_1 + d(i-1),\quad l_i = l_1 + d(i-1)$$

となる．さらに次を仮定する：

$$k_i = l_i + d. \tag{6}$$

(1)式と同様に，各 i について次の関係が得られる：

$$\begin{aligned} &n_i + (n_i+1) + (n_i+2) + \cdots + (n_i+k_i-1) \\ &\quad = (n_i+k_i) + (n_i+k_i+1) + \cdots + (n_i+k_i+l_i-1). \end{aligned} \tag{7}$$

なお $n_{i+1} = n_i + k_i + l_i = n_i + 2k_i - d$ である．これより

$$\begin{aligned} k_i n_i + \frac{1}{2}k_i(k_i-1) &= l_i(n_i+k_i) + \frac{1}{2}l_i(l_i-1) \\ &= (k_i-d)(n_i+k_i) + \frac{1}{2}(k_i-d)(k_i-d-1) \end{aligned}$$

となり，これを整理すると，次が得られる：

$$k_i^2 - 2dk_i - dn_i + \frac{1}{2}d(d+1) = 0. \tag{8}$$

n_i と k_i は連動しており，このような関係を満たす n_i と k_i が存在するためには，k_i は適当な整数 n_i に対して，整数解とならなければならない．2 次方程式の解

の公式と $k_i > d$ より

$k_i = d + \sqrt{D_i}$

とならなければならない．ここで，

$$D_i = d^2 - \{-dn_i + \frac{1}{2}d(d+1)\} = \frac{d}{2}(2n_i + d - 1) \tag{9}$$

である．したがって，$D_i = t_i^2$ となるような $t_i (>0)$ があればよい．

具体的に，いくつかの場合について確認してみよう．

(i) $d=1$ の場合，(9)より $D_i = n_i$ より，$n_i = t_i^2 (t_i > 0)$ となる t_i をとればよい．

$k_i = d + \sqrt{D_i} = 1 + t_i$，$k_i - k_{i-1} = d = 1$

より，$t_i - t_{i-1} = 1$ であるから，$\{t_i\}$ は公差 1 の等差数列である．したがって，$t_1 = 1$ とすると，$t_i = i$ となり，

$k_i = i + 1, \quad l_i = i, \quad n_i = i^2$

となる．これは最初に挙げた例である．

(ii) $d=2$ の場合，(9)より

$D_i = 2n_i + 1$

であり，これが平方数となればよいので，これを $t_i^2 (t_i > 0)$ とする．ただし，t_i は奇数でなければならない．この場合，k_i，n_i は次のようになる：

$$k_i = 2 + t_i, \quad n_i = \frac{t_i^2 - 1}{2}.$$

ここで，$k_i - k_{i-1} = d = 2$ より，$t_i - t_{i-1} = 2$ である．よって $\{t_i\}$ は公差 2 の等差数列であり，t_i が奇数であることから，初項を $t_1 = 1$ とすると，

$t_i = 2i - 1, \quad k_i = 2i + 1, \quad l_i = 2i - 1, \quad n_i = 2i(i-1).$

また A_i と B_i で区切られる数の和，u_i と v_i については（4）と（7）より

$$u_i (= v_i) = n_i k_i - \frac{1}{2} k_i (k_i - 1) = i(2i-1)(2i+1)$$

となる．ここでは $n_1 = 0$ であり，この場合の区切り方は次のようである：

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|l}
A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 & \\
\underbrace{0\ \ 1\ \ 2}_{3\text{個}} & \underbrace{3}_{1\text{個}} & \underbrace{4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8}_{5\text{個}} & \underbrace{9\ \ 10\ \ 11}_{3\text{個}} & \underbrace{12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 18}_{7\text{個}} & \underbrace{19\ \ 20\ \ 21\ \ 22\ \ 23}_{5\text{個}} & \cdots \\
(3) & (3) & (30) & (30) & (105) & (105) &
\end{array}$$

(iii) $d=3$ の場合，(9) より

$$D_i=3(n_i+1)$$

であり，これが平方数となればよいので，これを $t_i^2(t_i>0)$ とする．t_i は 3 の倍数でなければならないので，

$$t_i=3c_i$$

とおくと，$k_i-k_{i-1}=3$ より，$c_i-c_{i-1}=1$ となり，$\{c_i\}$ は公差 1 の等差数列なので，初項を 1 とすると，$c_i=i$ であり，

$$t_i=3i, \qquad k_i=3+3i, \qquad l_i=3i, \qquad n_i=\frac{t_i^2}{3}-1=3i^2-1$$

となる．またこの場合，A_i で区切られる整数の和と B_i で区切られる整数の和，u_i，v_i については

$$u_i(=v_i)=n_ik_i-\frac{1}{2}k_i(k_i-1)=\frac{9}{2}i(i+1)(2i+1)$$

となる．なおここでは $n_1=2$ である．この場合の区切り方は次のようである：

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|l}
A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 & \\
\underbrace{2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7}_{6\text{個}} & \underbrace{8\ \ 9\ \ 10}_{3\text{個}} & \underbrace{11\cdots 19}_{9\text{個}} & \underbrace{20\cdots 25}_{6\text{個}} & \underbrace{26\cdots 37}_{12\text{個}} & \underbrace{38\cdots 46}_{9\text{個}} & \cdots \\
(27) & (27) & (135) & (135) & (378) & (378) &
\end{array}$$

(iv) $d=4$ の場合，(9) より

$$D_i=2(2n_i+3)$$

となり，これは平方数にはならないので，この場合には和が等しくなるような区切り方は存在しない．

では一般の d についてどうなるのか，次節で調べてみる．

3　一般の d について

3.1　d が奇数の場合

まず d が奇数の場合を考える．一般に奇数は次のように表せるであろう：

$$d=(2p+1)^2(2q+1)\quad(p\geqq 0,\ q\geqq 0)$$

ただし，p はこのようなものの最大のものとする．

(9)より

$$D_i=\frac{d}{2}(2n_i-d+1)=t_i^2$$

となるような t_i があればよい．この式より

$$(2p+1)^2(2q+1)(2n_i+d-1)=2t_i^2$$

となる．両辺とも整数の乗算であるから，$t_i=(2p+1)(2q+1)c_i$（c_i は整数）でなければならない．ここで

$$k_i=d+t_i=d+(2p+1)(2q+1)c_i$$

であり，仮定より $k_i-k_{i-1}=d$ であるから

$$k_i-k_{i-1}=(2p+1)(2q+1)(c_i-c_{i-1})=(2p+1)^2(2q+1)$$

より，

$$c_i-c_{i-1}=2p+1$$

となり，$\{c_i\}$ は公差 $2p+1$ の等差数列である．すなわち

$$c_i=c_1+(2p+1)(i-1)$$

である．ここで，$k_i>d$ より $1\leqq c_1\leqq 2p+1$ である．これより，

$$t_i=(2p+1)(2q+1)\{c_1+(2p+1)(i-1)\}=d\left(\frac{c_1}{2p+1}+i-1\right),$$

$$k_i=d+t_i=d\left(\frac{c_1}{2p+1}+i\right). \tag{10}$$

n_i については

$$2n_i+d-1=2(2q+1)c_i^2$$

より

$$n_i=(2q+1)c_i^2-\frac{d-1}{2} \tag{11}$$

である．

例として $d=27$（$p=1$，$q=1$）の場合を考える．この場合，c_1 としては，(i) $c_1=1$, (ii) $c_1=2$, (iii) $c_1=3$ の 3 通りが考えられる．それらを具体的に求めると，

(i) $c_1=1$ のとき

$$c_i=3i-2, \qquad k_i=27i+9, \qquad n_i=3(3i-2)^2-13$$

となり，次のような分割になる：

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	
$\underbrace{-10 \cdots 25}_{36\text{個}}$	$\underbrace{26 \cdots 34}_{9\text{個}}$	$\underbrace{35 \cdots 97}_{63\text{個}}$	$\underbrace{98 \cdots 133}_{36\text{個}}$	$\underbrace{134 \cdots 223}_{90\text{個}}$	$\underbrace{224 \cdots 286}_{63\text{個}}$	$\cdots$
(270)	(270)	(4158)	(4158)	(16065)	(16065)	

(ii) $c_1=2$ のとき

$$c_i=3i-1,\ k_i=27i+18,\ n_i=3(3i-1)^2-13$$

となり，次のような分割になる：

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	
$\underbrace{-1 \cdots 43}_{45\text{個}}$	$\underbrace{44 \cdots 61}_{18\text{個}}$	$\underbrace{62 \cdots 133}_{72\text{個}}$	$\underbrace{134 \cdots 178}_{45\text{個}}$	$\underbrace{179 \cdots 277}_{99\text{個}}$	$\underbrace{278 \cdots 349}_{72\text{個}}$	$\cdots$
(945)	(945)	(7020)	(7020)	(22572)	(22572)	

(iii) $c_1=3$ のとき

$$c_i=3i, \qquad k_i=27i+27, \qquad n_i=27i^2-13$$

となり，次のような分割になる：

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	
$\underbrace{14 \cdots 67}_{54\text{個}}$	$\underbrace{68 \cdots 94}_{27\text{個}}$	$\underbrace{95 \cdots 175}_{81\text{個}}$	$\underbrace{176 \cdots 229}_{54\text{個}}$	$\underbrace{230 \cdots 337}_{108\text{個}}$	$\underbrace{338 \cdots 418}_{81\text{個}}$	$\cdots$
(2187)	(2187)	(10935)	(10935)	(30618)	(30618)	

なお，p は平方数となる最大のものとしたが，これを無視し，$p=0$，$q=13$ とした場合，得られるのは上の（c）の場合のみある．

3.2　d が偶数の場合

d を素因数分解したとき，含まれる 2 の個数が偶数個か奇数個の場合に分けて考える：

(i) 偶数個の場合，$d=2^{2m}(2q+1)\,(m\geqq 1,\ q\geqq 0)$ とすると，

$$D_i=\frac{2^{2m}(2q+1)}{2}(2n_i+2^{2m}(2q+1)-1)$$

となるが，$\sqrt{D_i}$ は整数にならない．よってこの場合は該当する区切り方はできない．具体的な d としては，4, 12, 16, 20, . . . , などである．

(ii) 奇数個の場合，$d=2^{2m+1}(2p+1)^2(2q+1)\,(m\geqq 0,\ q\geqq 0)$ とする．ただし，ここでの p もこのようなものの最大のものとする．このとき

$$D_i=\frac{2^{2m+1}(2p+1)^2(2q+1)}{2}\{2n_i+2^{2m+1}(2p+1)^2(2q+1)-1\}$$

$$=2^{2m}(2p+1)^2(2q+1)\{2n_i+2^{2m+1}(2p+1)^2(2q+1)-1\}.$$

ここで D_i が平方数 t_i^2 となるためには,

$$t_i=2^m(2p+1)(2q+1)c_i$$

でなければならない．ここで $k_i=d+t_i$ より

$$k_i=d+2^m(2p+1)(2q+1)c_i.$$

また $k_i-k_{i-1}=d$ より

$$2^m(2p+1)(2q+1)(c_i-c_{i-1})=2^{2m+1}(2p+1)^2(2q+1)$$

であるから，$c_i-c_{i-1}=2^{m+1}(2p+1)$ である．つまり，$\{c_i\}$ は公差 $2^{m+1}(2p+1)$ の等差数列である．初項を c_1 とすると，$c_i=c_1+2^{m+1}(2p+1)(i-1)$ である．これより

$$k_i=d+2^m(2p+1)(2q+1)\{c_1+2^{m+1}(2p+1)(i-1)\}=d\left(\frac{c_1}{2^{m+1}(2p+1)}+i\right).$$

なお n_i については

$$2n_i+2^{2m+1}(2p+1)^2(2q+1)-1=(2q+1)c_i^2 \tag{12}$$

から求められるが, 両辺を比較すると, c_i は奇数でなければならない．したがって，初項 c_1 は $1\leqq c_1\leqq 2^{m+1}(2p+1)$ の範囲での奇数でなければならない．n_i は次のように表される：

$$n_i=\frac{1}{2}\{(2q+1)c_i^2-d+1\}.$$

簡単な場合として，$d=24\,(m=2,\ p=0,\ q=1)$ の場合を確認してみる．$\{c_i\}$ の初項としては，(i) $c_1=1$，(ii) $c_1=3$ の 2 通りの場合がある．これらに応じて次のような場合がある．

(i) $c_1=1$ のとき，$c_i=1+4(i-1)=4i-3$ より

$$k_i=24+6(4i-3)=24i+6,\qquad l_i=24i-18\qquad n_i=\frac{1}{2}\{3(4i-3)^2-23\}$$

である．これより次のような区切り方になる：

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	
$\underbrace{-10\cdots19}_{30\text{個}}$	$\underbrace{20\cdots25}_{6\text{個}}$	$\underbrace{26\cdots79}_{54\text{個}}$	$\underbrace{80\cdots109}_{30\text{個}}$	$\underbrace{110\cdots187}_{78\text{個}}$	$\underbrace{188\cdots241}_{54\text{個}}$	$\cdots$
(135)	(135)	(2835)	(2835)	(11583)	(11583)	

(i) $c_1=3$ のとき，$c_i=3+4(i-1)=4i-1$ より

$$k_i=24+6(4i-1)=24i+18,\qquad l_i=24i-6\qquad n_i=\frac{1}{2}\{3(4i-1)^2-23\}$$

であり，次のような区切り方になる：

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	
$\underbrace{2\cdots43}_{42\text{個}}$	$\underbrace{44\cdots61}_{18\text{個}}$	$\underbrace{62\cdots127}_{66\text{個}}$	$\underbrace{128\cdots169}_{42\text{個}}$	$\underbrace{170\cdots259}_{90\text{個}}$	$\underbrace{260\cdots325}_{66\text{個}}$	$\cdots$
(945)	(945)	(6237)	(6237)	(19305)	(19305)	

4　終わりに

算数の授業でも，整数を使ったクイズなどがとりあげられることもあるだろう．例えば，1 から 9 までの数から 4 つを選んでもらい，適当に並べかえて 4 桁の数を 2 つ作り，その差を計算する．その答えの各桁の 4 つの数の 3 つまでを教えてもらい，残った最後の数を当てるといったものである．これは十進位取り記数法の性質から 9 の倍数ができることを利用したものであるが，児童たちは（大学生でもあるいは大人でも）興味を示してくれるであろう．仕掛け

がわかれば簡単な問題だが，興味や関心を引き出すという点からすると，教育的には有用なものであろう．ここで取り上げた問題は，これよりは少し複雑かもしれないが，興味深いトピックかと思われる．

参考文献

［1］Roger B. Nielsen（1997）“Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking”（The Mathematical Association of America）-秋山仁他訳（2002）；『証明の展覧会 I，II』（東海大学出版会）．

［2］一松　信（2017）「累乗和の公式について」，大学への数学（東京出版），61(13)50-53.

［3］一松　信（2019）「続・創作数学演義」（現代数学社）

西南学院大学人間科学部児童教育学科