

非対称分布モデルと日本の所得分配： 中間層の測定

吉 岡 慎 一

はじめに

1. 採用される分布モデル
2. 4種類の分布モデルの母数推定
3. 推定母数による実証結果

おわりに 参考文献 補論

は じ め に

所得分布の研究において第2種一般化ベータ分布 (GB2) の適合性が高いことはよく知られており、吉岡 (2011) においては日本の所得分配データによってこのことが確認されたが、その主眼の1つは GB2の最尤推定における4種類の最適化手法の比較の試みである。本稿においては、GB2と他の3種類の非対称正規モデル-3-母数対数正規 (LN3)、非対称正規 (SN)、対数正規一般化パレート (LNGP) -との適合度や分布特性の実証結果の比較が行われる。よく知られたパレート分布は分布の上部にしか適合せず、対数正規分布は分布の中央部以下に対し適合度が比較的良いので、両者は互いにその短所を補い合うと考えられるので、特に5-母数 LNGPが採用される。4種類の分布共、母数を3つ以上持つので、いわゆるローレンツ曲線の交叉が出現し得るモデルである。そこで第1節において、採用される4つの分布モデルの簡単な説明が行われ、第2節において、世帯所得の規模分布に関する4種類の分布モデルの母数が最尤法によって推定され、赤池情報量規準 (AIC) によりそれぞれの分布

モデルの適合度が判定される。次に第3節において、4つの分布モデルごとに推定された母数で相対不平等度としてのジニ係数と相対貧困率が計測され、標本から直接計測されたこの2つの指標の時系列変動との比較が行われる。特にLNGPを採用すると、このモデルの母数の1つの閾値を用いて相対富裕率が推定され、相対貧困率と相対富裕率の残余部分としての中間層率が得られる。中間層の規模を把握する従来の方法は絶対概念を用いる方法と相対概念を用いる方法の2つであるが、本稿においてはこの2つの概念の折衷策を提案している。

1. 採用される分布モデル

(1) 第2種一般化ベータ (GB2)

確率変数 X の値を $x \geq 0$ とするとき、GB2分布の密度関数はベータ関数 B を用いて次のように定義される¹⁾。

$$f(x) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{ap} B(p, q) [1 + (x/b)^a]^{p+q}}, \quad a > 0, b > 0, p > 0, q > 0.$$

$$B(p, q) = \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz.$$

b は尺度母数であり、他はすべて形状母数である。

$a=1$ のとき3-母数の第2種ベータ分布、 $p=1$ のとき3-母数 Singh and Maddala (1976) 分布、 $q=1$ のとき3-母数 Dagum (1977) 分布にそれぞれなる。また、GB2の k 次のモーメントは次のように表わされる。

$$E(X^k) = \frac{b^k B(p+k/a, q-k/a)}{B(p, q)}, \quad -ap < k < aq.$$

1) McDonald (1984).

(2) 3-母数対数正規 (LN3)

3-母数対数正規分布に従う確率変数 X の密度関数は、次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{(x-\gamma)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\{\ln(x-\gamma)-\mu\}^2}{2\sigma^2}\right], \gamma < x, -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma.$$

位置母数 (閾値) $\gamma = 0$ のとき、2-母数対数正規分布が得られ、期待値と分散はそれぞれ次のようになる。

$$E(X) = \gamma + \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

$$V(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1).$$

(3) 非対称正規 (SN)

位置母数 ε 、規模母数 ω および形状母数 λ の非対称正規分布に従う確率変数 X の密度関数は、次式で与えられる²⁾。

$$f(x) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x-\varepsilon}{\omega}\right) \Phi\left(\frac{x-\varepsilon}{\omega} \lambda\right), \omega > 0.$$

ここに、 ϕ と Φ はそれぞれ標準正規分布の密度関数と累積分布関数である。
SN ($\varepsilon, \omega, \lambda$) の k 次のモーメントは次のように表わされる。

$$E(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x-\varepsilon}{\omega}\right) \Phi\left(\frac{x-\varepsilon}{\omega} \lambda\right) dx.$$

例えば、 $X \sim \text{SN}(0, 1, \lambda)$ ならば、

$$E(X) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda^2+1}},$$

$$E(X^2) = 1.$$

となる。

2) Azzalini (1985).

(4) 対数正規一般化パレート (LNGP)

対数正規一般化パレートは極値混合モデル³⁾の1つであり、データ集合のある閾値以下の部分に対数正規 (LN) 分布を、その閾値以上の部分に一般化パレート (GP) 分布をそれぞれ想定し、この両者を接合するモデルである。LN の母数は対数平均 ($\ln mean$) と対数標準偏差 ($\ln sd$) とであり、GP の母数は閾値 (u)、規模 (σ_u) および形状 (ξ) である⁴⁾。

2. 4種類の分布モデルの母数推定

2.1 母数の推定結果

所得分配の実証研究において十分な量の個票データを入手することは困難であり、たいてい集計データしか公表されないことが通常である。そのような場合にデータの補間や補外ができる⁵⁾分布モデルの利用価値は高い。特に、所得分配のデータにおいては、規模分布のスケール上の目盛りの最下部や最上部は打ち切りになっており、さらに所得区間の平均値のような代表値が公表されることがあるが不明なことがおおい。そこで、所得分配を連続分布とみなすと分布モデルの利用価値が高まるのである。分布モデルを採用すると少数の母数で所得分配を記述することができ、モデルによってはいくつかの不平等測度や貧困測度やいわゆるローレンツ曲線等が母数だけで表現できることがある。

我が国における所得分配の不平等度と貧困度の時系列変動は、『国民生活基礎調査』(厚生労働省)の17から25所得階級データ⁶⁾を利用して1970年代中期から2010年頃までについて、吉岡(2010, 2014)において明らかにされているので、ここでも同じデータが利用される。『国民生活基礎調査』の25所得階級データが、その階級数の多さにもかかわらず所得分配の実証研究においてほとんど利用されないのは、最低階級以下と最高階級以上が打ち切りになっており、

3) 極値混合モデルの展開は Behens et al. (2004) を参照。

4) LNGP の分布関数等の概説は補論を参照。

5) Nygård and Sandström (1981)。

6) 我が国の所得分配に関する統計資料の概要とその問題点は、青木(1979)、橋本・八木(1994)、吉岡(1995)などを参照。

表2-1 母数の推定値(1)

		2010年				
LNGP 対数正規一般化パレート	lnmean	lnsd	u	σ_u	xi	
	6.0028	0.8746	1050	251.15	0.3420	
GB2 第2種一般化ベータ	a	b	p	q		
	1.5778	927.77	1.1274	3.0939		
LN3 3-母数対数正規	lnmean	lnsd	γ			
	6.1921	0.6630	-69.45			
SN 非対称正規	ε	ω	λ			
	560.05	387.02	4.55			
		2005年				
LNGP 対数正規一般化パレート	lnmean	lnsd	u	σ_u	xi	
	6.0349	0.8576	1050	678.42	-0.3074	
GB2 第2種一般化ベータ	a	b	p	q		
	2.1440	712.66	0.7654	1.5833		
LN3 3-母数対数正規	lnmean	lnsd	γ			
	6.2557	0.6559	-78.92			
SN 非対称正規	ε	ω	λ			
	586.33	407.72	4.54			

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』各年版の度数分布により計測。

(注) 母数記号については本文参照。

さらに各所得階級の代表値としての平均値が公表されないからである。ここでは、各所得階級の代表値として中央値が採用される⁷⁾。表2-1および表2-2は、総世帯所得の度数分布に関する4種類の分布モデルの母数の最尤法による推定結果である⁸⁾。

2.2 AICによる適合度の判定

分布モデルを選択する規準は分析目的によって多数あるが、ここではまずモデルの適合度の判定を行う。モデルの最大対数尤度に対応する赤池情報量規準(AIC)の計算結果が表2-3である。一般的に母数の数が多い分布モデルほど

7) 最低階級の代表値はこの階級の上限の0.5倍と、最高階級の代表値はこの階級の下限の1.25倍とそれぞれみなされる。

8) 公表集計データからは、総世帯所得を等価所得に変換できる家計情報が得られない。

表2-2 母数の推定値(2)

		2000年				
LN3 3-母数対数正規	LNGP 対数正規一般化パレート	lnmean	lnsd	u	σ_u	xi
		6.1143	0.8846	1150	842.10	-0.5022
GB2 第2種一般化ベータ		a	b	p	q	
		2.3443	828.05	0.6418	1.5070	
SN 非対称正規		ε	ω	λ		
		631.25	444.92	4.48		
		1995年				
LN3 3-母数対数正規	LNGP 対数正規一般化パレート	lnmean	lnsd	u	σ_u	xi
		6.2140	0.8076	1350	1397.14	-1.2145
GB2 第2種一般化ベータ		a	b	p	q	
		2.1971	1083.16	0.7000	2.1943	
SN 非対称正規		ε	ω	λ		
		671.08	454.25	3.70		

(資料) 表2-1に同じ。

(注) 母数記号については本文参照。

表2-3 赤池情報量規準 (AIC)

分布モデル	2010年	2005年	2000年	1995年
GB2	102981.0	90294.6	146733.6	117796.5
LN3	103050.1	90326.3	146842.6	117944.2
LNGP	103216.0	90535.2	145945.1	124901.0
SN	103319.8	90556.3	147168.9	127291.6

(資料) 表2-1に同じ。

(注) 分布モデル名については表2-1参照。

適合度が高いが、表2-3によると、ここに採用された4時点に関しては、3時点においてGB2の適合度が一番高く⁹⁾、それに次ぐのが3時点でLN3であり、どの時点においてもSNが最下位となる¹⁰⁾。2000年のように5-母数のLNGPの適合度が一番高くなることもあるが、他の時点では三番目となる。

9) Reed (2003) によって報告されたように、二重パレート対数正規分布のほうがデータによってはGB2よりも適合性が高いことがある。

3. 推定母数による実証結果

3.1 ジニ係数と相対貧困率

表3-1はジニ係数や相対貧困率などの指標の推定値である。ジニ係数はどの分布モデルにおいても1990年代中期から2000年代（中期）にかけて上昇しているが、2000年代後半はやや低下か高止まりの状態である。吉岡（2014）によると、標本から直接推計された相対的不平等度（ジニ係数、変動係数、Theil, Atkinson, 一般化エントロピー）は、1970年代中期から2000年代末頃まで約35年間上昇傾向にある。標本から直接推計された貧困率の場合、吉岡（2014）に

表3-1 推定指標 貧困線 = 推定中央値/2

GB2	相対貧困率	ジニ係数	中央値	
1995年	0.2051	0.3823	542.6	
2000年	0.2087	0.4052	495.3	
2005年	0.2027	0.4084	449.6	
2010年	0.2063	0.4020	428.6	
LN3	相対貧困率	ジニ係数	中央値	
1995年	0.1930	0.3931	523.1	
2000年	0.2022	0.4065	485.3	
2005年	0.2000	0.4090	442.0	
2010年	0.1991	0.4094	419.4	
SN	相対貧困率	ジニ係数	中央値	
1995年	0.2306	0.3763	582.1	
2000年	0.2436	0.3904	542.8	
2005年	0.2392	0.3851	505.2	
2010年	0.2371	0.3827	483.1	
LNGP	相対貧困率	ジニ係数	中央値	相対富裕率
1995年	0.1954	0.4167	499.5	0.1091
2000年	0.2167	0.4353	452.3	0.1457
2005年	0.2095	0.4301	417.7	0.1412
2010年	0.2140	0.4222	404.6	0.1377

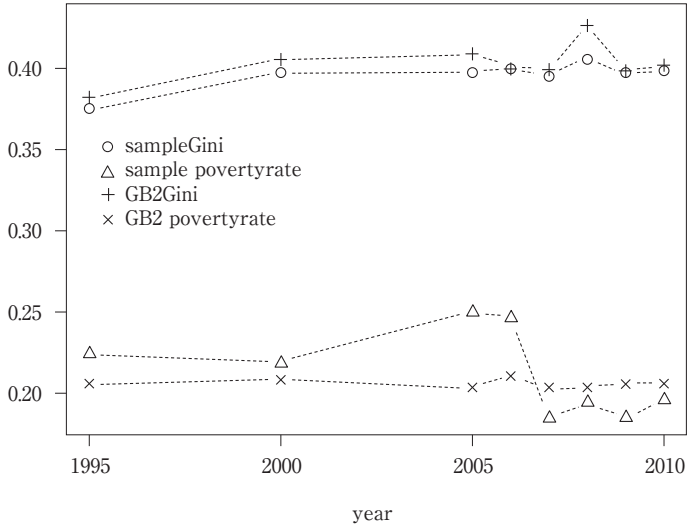
（資料）表2-1に同じ。

（注）分布モデル名については表2-1参照。

10) それでも3時点でSNのほうが通常の（2-母数）対数正規LN2よりも適合度が高い。しかし、1995年のようにLN2のほうがLNGPよりも適合度が高くなることもある。

図3-1 ジニ係数と貧困率の推移

Gini and poverty rate



(資料) 表3-1のGB2に関する推定値と別途計算された標本による推定値から作成。

よると2000年に一時的に低下するが¹¹⁾、1980年代から2005年頃まで上昇傾向にあり、それ以降2000年代末頃まで低下している¹¹⁾。分布モデルによる貧困率はそのモデルにおいても1990年代中期から2000年にかけて上昇し、2000年代はやや低下か高止まりの状態である。2000年代後半における貧困率の動向が他の分布モデルといくぶん異なるGB2については更なる検討が必要であろう。図3-1はGB2による推定ジニ係数および貧困率と標本から直接推定のジニ係数および貧困率の1990年代中期から2010年の推移を示している¹²⁾。図3-1において特に別途計算された2000年代後半の指標に注目すると、ジニ係数はGB2によっても標本によっても高止まりの状態であり、貧困率はGB2によると高止まりの状態、標本貧困率はやや低下後高止まりの状態とそれぞれいえよう。厚生労働省

11) 貧困のWatts(1968)測定、貧困ギャップ比およびFGT(1984)測定は1980年代から2000年頃まで上昇傾向にあり、それ以降2000年代末頃まで低下している(吉岡, 2014)。

12) 表3-1のGB2に関する推定値と別途計算された標本による推定値とを利用。

表3-2 等価可処分所得による相対貧困率%

貧困線 = 所得中央値/2

1985年	1988年	1991年	1994年	1997年
12.0	13.2	13.5	13.7	14.6
2000年	2003年	2006年	2009年	2012年
15.3	14.9	15.7	16.0	16.1

(資料) 厚生労働省『国民生活基礎調査』2013年版。

表3-3 貧困率・中間層率・富裕率

LNGP	相対貧困率	中間層率	相対富裕率
1995年	0.1954	0.6955	0.1091
2000年	0.2167	0.6376	0.1457
2005年	0.2095	0.6493	0.1412
2010年	0.2140	0.6483	0.1377

(資料) 表3-1により作成。

公表の等価可処分所得による相対貧困率は、1980年代中期から2000年頃まで上昇傾向を示し、2000年代初めに一旦低下するがその後再び上昇傾向を示している(表3-2)。

3.2 相対富裕率と中間層率

5-母数の LNGP の適合度は本稿で採用された4-母数や3-母数の分布モデルの適合度よりも高いわけではないが、それでも LNGP には次のような長所がある¹³⁾：閾値以上に属す人口比を相対富裕率と定義するならば、相対貧困率に対する相対富裕率を推定することができる。この研究分野において中間層の定義は定まってないから、ここでは中間層率を相対貧困率と相対富裕率の残余部分と定義すると表3-3の実証結果が得られる。LNGP によると、貧困率は1990年代中期から2000年にかけて上昇し、2000年代はやや低下後高止まりの状態であり、相対富裕率もほぼ同様の変動をしている。中間層率の変動は、その定義からこの両者の変動に連動する。つまり、中間層率はこの両者が1990年代中期から2000年にかけて上昇しているときに低下し¹⁴⁾、2000年代にこの両者がやや低

13) 他の長所として、形状母数で分布の上限値を推定することができる点が挙げられる。

14) 白波瀬(2011)や篠崎(2015)における実証結果とほぼ同じである。

下しているときに上昇し、その後この両者に変動が見られないときには変動していない。

3.3 所得に基づき中間層を把握する2つの方法

所得分布を利用した中間層の相対的な規定法は2つある¹⁵⁾。

1) 中間層の何らかのシェアなどの特性を得るために、天下一的(トータル)に中間層の割合を決める方法。

例えば中間層は、分布の最下位20%と最上位20%の間の60%と規定され、Foster and Wolfson (2010) や OECD (2015) において採用されている¹⁶⁾。

2) 所得中央値のある割合で中間層の両端の境界線を決める方法。

中間層の規模と特性を知ることができ、表3-4のようにその利用例は多い。また、Atkinson and Brandolini (2013) においては、下部境界として所得中央値の75%が、上部境界として中央値の125%、150%、167%、200%および300%がそれぞれ用いられている。

このような状況下で、本稿における中間層の規定はいくぶん特殊で相対定義と絶対定義の折衷策であり、中間層の下部境界が所得中央値の50%であるのにたいし、上部境界はGPDが当てはまる閾値である。そこでこの閾値が推定された所得中央値の何%に当たるのかを調べた結果が表3-5である。我が国の中間層の上部境界は中央値の250%から270%の間にあり、先進諸国についてのAtkinson and Brandolini (2013) の見解に添っている。下部境界が所得中央値の50%と固定されているから、中間層率の変動を上部境界の変動に関連付けることができる。上述された1990年代中期から2000年にかけての中間層率の低下は上部境界の割合の低下、つまり中間層率の相対範囲の縮小に関連している。そして中間層率の2000年代の不変性は上部境界の割合がほとんど変動していない

15) 篠崎 (2015) によると中間層を把握する方法に階層の境界線を絶対水準で定義する方法もある。低所得層と中間層、中間層と高所得層の境界を購買力平価換算の米ドル (US\$) で計った1人あたり1日の消費額で定義した上で、中間層の割合を計算する。主として発展途上国の中間層に関して用いられるが、経済発展の水準がかなり異なる先進国との比較は困難である。

16) 中間層比として40%が採用されることもある (Piketty, 2014)。

表3-4 中間層の範囲

文 献	所得中央値による境界線		範囲%ポイント
	下部境界%	上部境界%	
Thurow (1984)	75	125	50
白波瀬 (2011)	50	175	125
厚生労働省 (2012)	50	150	100
Vanneman = Dubey (2013)	50	200	150
Chauvel (2013)	75	250	175
篠崎 (2015)	75	167	92

(資料) 表中の文献により作成。

表3-5 推定中央値に対する上部境界比

LNGP	閾値(万円)	上部境界比%	下部境界比との差 (%ポイント)
1995年	1350.0	270	220
2000年	1150.1	254	204
2005年	1050.0	251	201
2010年	1050.0	260	210

(資料) 表2-1, 表2-2及び表3-1により作成。

ことに関連する。中間層に関する本稿の実証結果は比較時点を増し、この層の下部境界の割合を拡大し、上部境界の割合を変動させて確認する必要がある。また、他の分布モデルによっても上記のことを確かめる必要がある。

お わ り に

所得分配の実証研究において十分な量の個票データを入手することは困難であり、たいいてい集計データしか公表されないことが通常である。そのような場合にデータの補間や補外ができ、分布特性の数値計算が可能な分布モデルの利用価値は高い。本稿においては、適合性が比較的高い第2種一般化ベータ分布(GB2)、3-母数対数正規(LN3)、非対称正規(SN)および対数正規一般化パラート(LNGP)の4種類の分布モデルが採用された。世帯の所得分配に関するこの4種類の分布モデルの母数が最尤法によって推定され、赤池情報量規準(AIC)によりそれぞれの分布モデルの適合度が判定された。その結果、1990

年代中期から2000年代において採用された4時点に関しては、3時点においてGB2の適合度が一番高く、それに次ぐのが3時点でLN3であり、どの時点においてもSNが最下位となり、2000年のように5-母数のLN_{GP}の適合度が一番高くなることがあるが、他の時点では三番目となった。

次に推定された母数によっていくつかの分布特性の計算が行われた。ジニ係数はどの分布モデルにおいても1990年代中期から2000年代にかけて上昇しているが、2000年代後半はやや低下か高止まりの状態であり、標本から直接推計されたジニ係数の時系列変動と大筋では同様である。分布モデルによる貧困率はどのモデルにおいても1990年代中期から2000年にかけて上昇し、2000年代はやや低下か高止まりの状態であり、標本から直接推計された貧困率の時系列変動と大筋では同様である。

所得に基づき中間層を規定する方法は大別して伝統的に2つあり、中間層の両端の境界線を絶対水準で定義する方法と所得中央値との相対的關係で定義する方法とである。相対貧困率だけでなく相対富裕率も定義できるLN_{GP}を採用し、中間層の下部境界線を所得中央値の50%に、上部境界線はGPDが当てはまる閾値にそれぞれ設定する本稿における中間層の規定法は相対定義と絶対定義の折衷策になっている。1980年代から先進諸国における中間所得層の衰退が指摘され出したが(Thurow, 1984)、本稿で取り上げられた最近については、中間層率は相対貧困率と相対富裕率が1990年代中期から2000年にかけて上昇しているときに低下し、2000年代にこの両者がやや低下しているときに上昇し、その後この両者に変動が見られないときには変動してないことが明らかにされた。先進諸国における中間層の衰退は家計の所得分布の分極化に対応しているので¹⁷⁾、両者の關係の検討も必要である。また、アメリカにおける中間層が3つの規準-所得・富、職業上の地位、教育水準-によって語られるのが通常だから(Leicht and Fitzgald, 2014)、中間層を把握するには所得分配との關係だけの検討では不十分であろう。

17) Thurow (1984), Esteban and Ray (1994), Pressman (2006), Foster and Wolfson (2010).

参 考 文 献

- 青木昌彦 (1979). 『分配理論』筑摩書房 第2章.
- Atkinson, A. and Brandolini, A. (2013). On the Identification of the Middle Class, in *Income Inequality : Economic Disparities and The Middle Class in Affluent Countries*. Ed. by J.C. Gornick and M. Jantti, CA : Stanford University Press.
- Azzalini, A. (1985). A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones. *Scand. J. Statist.*, 12, 171-178.
- Behrens, C. N., H. F. Lopes, and Gerner, D. (2004). Bayesian Analysis of Extreme Events with Threshold Estimation, *Statistical Modelling*, 4, 227-244.
- Chauvel, L. (2013). Welfare Regimes, Cohorts, and the Middle Class, in *Income Inequality : Economic Disparities and The Middle Class in Affluent Countries*. Ed. by J. C. Gornick and M. Jantti, CA : Stanford University Press.
- Coles, S.G. (2001). *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values*, London : Springer.
- Dagum, C. (1977). A New Model of Personal Income Distribution : specification and estimation, *Economie Appliquee*, 30, 413-437.
- Esteban, J.-M. and Ray, D. (1994). On the Measurement of Polarization, *Econometrica*, 62, 819-851.
- Foster, J., J. Greer and Thorbecke, E. (1984). A Class of Decomposable Poverty Measures, *Econometrica*, 52, 761-766.
- Foster, J. and Wolfson, M.C. (2010). Polarization and the Decline of the Middle Class : Canada and the US, *Journal of Economic Inequality*, 8, 247-273.
- 厚生労働省 (2012). 『平成24年度 労働経済白書』
- Leicht, K. and Fitzgerald, S. (2014). *Middle Class Meltdown in America*, (2nd ed.), New York : Routledge.
- McDonald, J. B. (1984). Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income, *Econometrica*, 52, 647-663.
- Nygård, F. and Sandström, A. (1981). *Measuring Income Inequality*, Stockholm : Almqvist & Wiksell International.
- OECD (2015). *In It Together : Why Less Inequality Benefits All*, Paris : OECD.
- Pickands, J. (1975). Statistical Inference using Extreme Order Statistics, *Ann. Statist.*, 3, 119-131.
- Piketty, T. (2014). *Capital in the Twenty-first Century*, Cambridge : Harvard University Press.
- Pressman, S. (2006). The Decline of the Middle Class : an international perspective, LIS Working Paper No. 280, March 2006.
- Reed, W. J. (2003). The Pareto Law of Incomes - an explanation and an extension, *Physica A*, 319, 579-597.
- 篠崎武久 (2015). 所得の観点から見た中間層の把握の方法について『人文社会科学研究』(早稲田大学), no. 55, 199-216.
- 白波瀬佐和子 (2011). 経済教室 縮む中間層 (上) 現役世代の再分配強化を『日本経済新聞』2011年10月24日付.
- Singh, S. K. and Maddala, G. S. (1976). A Function for the Size Distribution of Income, *Econometrica*, 44, 963-970.
- 橋本俊昭・八木匡 (1994). 所得分配の現状と最近の推移 石川経夫編『日本の所得分配と富の分配』東京大学出版会 第1章.

- Thurow, L. C. (1984). The Disappearance of the Middle Class, *The New York Times*, February 5, E2.
- Vanneman, R. and Dubey, A. (2013). Horizontal and Vertical Inequalities in India, in *Income Inequality: Economic Disparities and The Middle Class in Affluent Countries*. Ed. by J. C. Gornick and M. Jantti, CA: Stanford University Press.
- Watts, H. (1968). An Economic Definition of Poverty, in *On Understanding Poverty*. Ed. by D. P. Moynihan, New York: Basic Books, 316-329.
- 吉岡慎一 (1995). アメリカと日本における所得分配の変動『西南学院大学経済学論集』30(3), 91-133.
- 吉岡慎一 (2010). 貧困の絶対測度と相対測度の計測 — Kolm-Zheng 型と FGT 型 — 『西南学院大学経済学論集』44(2・3), 115-140.
- 吉岡慎一 (2011). 第2種一般化ベータ分布の日本の所得分配への適用『西南学院大学経済学論集』45(1・2), 123-138.
- 吉岡慎一 (2014). 貧困及び不平等測度の要因分解と世帯構成の変化『西南学院大学経済学論集』48(3・4), 251-274.

補論：対数正規一般化パレート (LNGP)

1. 一般化パレート (GP) 分布¹⁸⁾

GPD の分布関数は次式で与えられる。

$$G(x | u, \sigma_u, xi) = \begin{cases} 1 - \left[1 + xi \left(\frac{x-u}{\sigma_u} \right) \right]^{-\frac{1}{xi}}, & xi \neq 0, \\ 1 - \exp \left[-\frac{x-u}{\sigma_u} \right], & xi = 0. \end{cases}$$

ここに、 u は閾値であり、 $\sigma_u > 0$ は規模母数である。また xi は GPD の裾の形状を決める母数であり、

$xi < 0$ のとき、 $u - \sigma_u/xi$ なる有限上端点をもつ比較的短い裾、

$xi = 0$ のとき、指数型の裾、

$xi > 0$ のとき、長い裾、

となる。

2. パラメトリック混合モデル

Behrens et al. (2004) はある閾値以下のバルクにあるパラメトリックモデルを、閾値以上には GPD をそれぞれ想定し、この両者を接合する極値混合モデルを展開している。パラメトリックモデルとして対数正規分布以外にガンマ分布、正規分布、ワイブル分布、ベータ分布などが検討されている。このモデルの分布関数はパラメトリック分布関数 $H(|\theta)$ を用いて次式で与えられる。

$$F(x | u, \theta, \sigma_u, xi) = \begin{cases} H(x | \theta), & x \leq u, \\ H(u | \theta) + (1 - H(u | \theta))G(x | u, \sigma_u, xi), & x > u. \end{cases}$$

$H(|\theta)$ を対数正規分布とするなら、

$$\theta = (\ln mean, \ln sd).$$

である。

18) Pickaids (1975), Coles (2001).