確率的割引ファクターと CAPM

相　模　裕　一

序

この研究ノートの目的は，確率的割引ファクターと CAPM の関係を明らかにすることである。現代のファイナンス理論において，確率的割引ファクターは様々な資産価格理論を統一的に把握する「核」となっている。ここでは特に，確率的割引ファクターを用いた価格式から直接に導かれるベータ価格式と CAPM の関係に焦点を当てて分析を行う。

本稿の構成は以下の通りである。まずⅠ節において，確率的割引ファクターによる価格付けを考えるため，状態価格とリスク中立確率との関係について整理する。続くⅡ節において，ベータ価格式を導出し，CAPM との関係について論じる。Ⅲ節においては，消費者の期待効用最大化の条件式から，CAPM 導出の必要条件の一つを示す。Ⅳ節においては，Stein’s lemma を用いる方法により CAPM を導出する。Ⅴ節において確率的割引ファクターの経済的含意を探り，理論的に整合的な生起確率について考える。最後に議論をまとめる。

Ⅰ．確率的割引ファクターによる価格付け

この節では，確率的割引ファクターによる価格付けを考えるため，状態価格とリスク中立確率（測度）との関係について整理する。

まず，リスク中立的な評価法とは，来期の証券価格の期待値を無リスク利子率で割り引いて証券価格を決定する方法である。その期待値計算に用いられるのがリスク中立確率である。市場が無裁定ならば，無リスク債券の理論価格は，状態価格の和に等しくなるはずである。なぜならすべての状態に対応するアロー証券を持つことは，リスクが完全に無くなることであり，アロー証券価格の和＝状態価格の和は，無リスク

債券の価格と等しくなるからである。

よって，状態価格を$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$とし，無リスク債券の収益率（利子率）を rとすると，

$$1 = \left(1 + r\right)(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_S)$$

となる。

これより，リスク中立確率を $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s$ とすると，

$$\pi_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{i=1}^{s} \varphi_i} \quad j \in \{1,2,\ldots,s\} \quad \pi_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{s} \pi_j = 1,$$

となる。

ここで資産α の来期の資産価格をp_αとし，状態 j での資産価格をd_jとすると，

$$p_\alpha = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j d_j \quad ・・・・(1)$$ と表せる。

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_j = \frac{1}{1+r}$$ より $$\varphi_j = \frac{1}{1+r}\pi_j$$ となることより，リスク中立確率を用いて

$$p_\alpha = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{s} \pi_j d_j ・・・・(2)$$ と表せる。

(1)と(2)はそれぞれ，状態価格とリスク中立確率による資産価格（株価）決定式で ある。

また，ここで状態集合$S \equiv \{1,2,\ldots,s\}$に対する生起確率を$\{q_1, q_2, \cdots q_s\}$とする。

$$q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{s} q_j = 1,$$

このq_j を用いて確率的割引ファクター（状態価格密度）m_j を次のように定義する。

$$m_j = \frac{\varphi_j}{q_j} \quad j \in \{1,2,\ldots,s\}$$ 　これより，以下の式が成立する。

$$p_\alpha = \sum_{j=1}^{s} q_j m_j d_j \quad ・・・・(3)$$

(2)と(3)はそれぞれある確率分布の下での期待値と見做すことができる。(2)はリスク中立確率で(3)は生起確率の期待値である。(2)の期待値を E_π (3)の 期待値 E をとすると，

$$p_\alpha = \frac{1}{1+r} E_\pi(d) ・・・・(4)$$

$$p_\alpha = E(md) \quad ・・・・(5)$$

となることが理解されよう。これより，

$$1=E(m\frac{d}{p_{\alpha}})\quad \cdot\cdot\cdot\cdot (6)$$

すなわち

$$1=\sum_{j=1}^{s} q_j m_j \frac{d_j}{p_{\alpha}}\quad \cdot\cdot\cdot (7)$$

ここで，無リスク債券の価格 p_r は定義より，

$$p_r=E\left\{m\left(1+r\right)\right\}=\sum_{j=1}^{s} q_j m_j \left(1+r\right)=\left(1+r\right)\sum_{j=1}^{s} q_j m_j=\left(1+r\right)\sum_{j=1}^{s}\varphi_j=1$$

よって　$1=E\left\{m\left(1+r\right)\right\}$　となる。ここで $1+r=r_f$ とする。よって

$$1=E\left(mr_f\right)\quad \cdot\cdot\cdot\cdot (8)$$

すなわち，$1=r_f E(m)$　よって　$r_f=\dfrac{1}{E(m)}$　・・・・(9)　となる。

Ⅱ．ベータ価格式の導出

この節では前節の(5)ないし(8)からベータ価格式を導き，CAPM との関係を考えよう。

まず，市場ポートフォリオの各状態における市場価値をR_j，$j\in\{1,2,\dots,s\}$とし，その価格をp_wとすると，前節の議論より

$p_w=E(mR)$となり，$1=E\left(m\dfrac{R}{p_w}\right)=E(mR^w)$・・・・(10)

となる。ここで，

$$E(mR^w)=E(m)E(R^w)+cov(m,R^w)$$

これより，

$$E(R^w)=\frac{1}{E(m)}\left(1-cov(m,R^w)\right)\cdot\cdot\cdot\cdot (11)$$

$$E(R^w)=\frac{1}{E(m)}-\frac{cov(m,R^w)}{E(m)}=\frac{1}{E(m)}-\frac{cov(m,R^w)}{var(m)}\cdot\frac{var(m)}{E(m)}\quad \cdot\cdot\cdot\cdot (12)$$

この(12)と(9) より以下のベータ価格式を得る。

$$E(R^w) = r_f + \frac{cov(m, R^w)}{var(m)} \cdot \left(-\frac{var(m)}{E(m)}\right) \cdot\cdot\cdot\cdot (13)$$

ここで　$\frac{cov(m, R^w)}{var(m)}$が$\beta_{mw}$に対応し，$-\frac{var(m)}{E(m)}$は市場リスクを表している。

(13)は以下のように表される。

$$E(R^w) = r_f + \beta_{mw}\left(E(m) - r_f E(m^2)\right) \cdot\cdot\cdot\cdot (14)$$

ここで資産 i の収益R^iについて　$1 = E(mR^i) \cdot\cdot\cdot\cdot (15)$　となることより，

$$E(R^i) = r_f + \frac{cov(m, R^i)}{var(m)} \cdot \left(-\frac{var(m)}{E(m)}\right) = r_f + \beta_{mi}\left(E(m) - r_f E(m^2)\right) \cdot\cdot\cdot\cdot (16)$$

となる。

上の(13)と(16)が確率的割引ファクターによるベータ価格式である。
ここで示される資産の期待収益は一般的にシャープ･リトナーの伝統的な CAPM とは異なる。いかなる場合，いかなる条件下で上記のベータ価格式が CAPM と一致するか考察しよう。すなわち，(14)，(16)から CAPM 式を導くことを考える。

ここで確率的割引ファクターに関して，以下の仮定をおく。すなわち確率的割引ファクターが市場ポートフォリオの収益R^wの一次式で表されると仮定する。この仮定の含意については，後述する。

$$m = a + bR^w \cdot\cdot\cdot\cdot (17)$$

この関係式を(9)と(11) に代入し，aとbを求めると，

$$a = \frac{1}{r_f} - bE(R^w) \cdot\cdot\cdot\cdot (18)$$

$$E(R^w) = r_f\left(1 - cov(a + bR^w, R^w)\right) = r_f\left(1 - E\left(aR^w + bR^{w2}\right) + E(a + bR^w)E(R^w)\right)$$
$$= r_f\left(1 - bE\left(R^{w2}\right) + bE(R^w)E(R^w)\right) = r_f - r_f b var(R^w)$$

よって

$$b = \frac{r_f - E(R^w)}{r_f var(R^w)} \cdot\cdot\cdot\cdot (19)$$

ここで資産 i の収益R^iについて(15)より以下の式が成立する。

$$E(R^i) = r_f\left(1 - cov(a + bR^w, R^i)\right) = r_f - br_f cov(R^w, R^i) \cdot\cdot\cdot\cdot (20)$$

$$E(R^i) - r_f = -\frac{r_f - E(R^w)}{r_f var(R^w)} r_f cov(R^w, R^i) = \frac{E(R^w) - r_f}{var(R^w)} cov(R^w, R^i)$$

よって

$$E(R^i) - r_f = \frac{cov(R^w, R^i)}{var(R^w)}\left(E(R^w) - r_f\right) \cdot \cdot \cdot \cdot (21)$$

これより，

$\beta_i = \dfrac{cov(R^w, R^i)}{var(R^w)}$　とすると，

$E(R^i) - r_f = \beta_i\left(E(R^w) - r_f\right)$　$i \in \{1,2,\ldots,s\}$ となり，伝統的な CAPM が成立する。
以上の議論より，CAPM 導出のために，「確率的割引ファクターが市場ポートフォリオの収益R^wの一次式で表されると」の仮定が決定的に重要であることが理解されよう。
次に，これがいかなる状況を含意しているか検討しよう。

Ⅲ．消費者の期待効用最大化

CAPM 導出のための条件を考察するうえで，重要な鍵となる消費者の期待効用最大化について考えよう。
ここでは，簡単化のため，２期間モデル（今期 t＝0と来期 t＝1）を考える。期待効用を以下のように想定する。

期待効用：$E[U(C)] = u(c_0) + \rho u(c_1)$　・・・・(23)

ここで c_0，c_1 は今期と来期における消費量，そしてρは主観的割引率である。消費者の最適化行動は，この期待効用を次の予算制約の下で，最大にすることである。

$c_0 + p\theta = W_0$　・・・・(24)

$c_1 + x\theta = W_1$　・・・・(25)

ここでW_0，W_1は今期と来期の外生的所得であり, p，xは今期と来期の資産価格である。そしてθは資産のポートフォリオを表している。ここでの最適化行動はθによる最大化によって求められる。なお x は確率変数である。
(24)，(25)の下で，(23)の最大化の１階の条件を求めると，

$$p = E\left[\frac{\rho u'(c_1)}{u'(c_0)}x\right] \cdot \cdot \cdot \cdot (26)$$

ここで確率的割引ファクターと異時点間の限界代替率が等しいことより，

$$m = \frac{\rho u'(c_1)}{u'(c_0)} \cdot \cdot \cdot \cdot (27)$$

これより，$p = E(mx)$　が得られる。

ここで$R^w = \dfrac{x}{p}$ とすると，(10)の$1 = E(mR^w)$ を得る。

では，$\dfrac{\rho u\prime(c_1)}{u\prime(c_0)} = a + bR^w$　・・・・(28)　となるのは，いかなる条件下であろうか。

一般的に，効用関数が二次関数の場合，(28)が成立することが知られている。そこで次式のような二次の効用関数を想定しよう。

$E[U(C)] = u(c_0) + \rho u(c_1) = -k(\bar{c} - c_0)^2 - k(\bar{c} - c_1)^2$・・・・(29)

ここで　$c_1 = W_1 = R^w(W_0 - c_0)$　の制約条件の下，(29)の期待効用を最大化すると，以下のようになる。なお，k は定数である。

$$m = \frac{\rho u'(c_1)}{u'(c_0)} = \rho\frac{\bar{c} - c_1}{\bar{c} - c_0} = \rho\frac{\bar{c} - R^w(W_0 - c_0)}{\bar{c} - c_0} = \frac{\rho\bar{c}}{\bar{c} - c_0} - \frac{\rho(W_0 - c_0)}{\bar{c} - c_0}R^w \quad \cdot\cdot\cdot\cdot (29)$$

ここで，$a = \dfrac{\rho\bar{c}}{\bar{c} - c_0}$，$b = -\dfrac{\rho(W_0 - c_0)}{\bar{c} - c_0}$ とすると

$m = a + bR^w$となることが理解されよう。また，Stein’s lemma を用いると，効用関数に特別な仮定を付すことなく，(28)を導くことができる。次節において，Stein’s lemma を証明し，(10)，(15)より(28)を導出しよう。

Ⅳ．Stein’s lemma を用いる方法

まず，Stein’s lemma を示し，初等的な証明を与えよう。ここでは連続型の確率変数XとYと同時確率密度関数$f(x,y)$を想定する。期待値μ_x，μ_y　標準偏差σ_x，σ_yを既知のものとし，リーマン積分を用いる。

Stein’s lemma

「確率変数XとYが 2 変量正規分布に従い，$\mathrm{g}(y)$が微分可能で，$E|\mathrm{g}'(y)| < \infty$のとき，$cov(X, \mathrm{g}(y)) = E[\mathrm{g}'(y)]cov(X, Y)$が成り立つ。」

証明

$$cov(X, \mathrm{g}(y)) = \iint x\mathrm{g}(y) f(x,y)\, dx\, dy - E(X)E\big(\mathrm{g}(y)\big)$$

$$= \int \mathrm{g}(y)\, E(X|y)\varphi(y)\, dy - E(X)E\big(\mathrm{g}(y)\big)$$

ここで，$\varphi(y)=\int f(x,y)\,dx$，$E(X|y)=\mu_x+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right)$より

$$cov(X,\mathrm{g}(y))=\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\int \mathrm{g}(y)\left(y-\mu_y\right)\varphi(y)\,dy=\rho\sigma_x\sigma_y\int \mathrm{g}(y)\left(\frac{y-\mu_y}{{\sigma_y}^2}\right)\varphi(y)\,dy$$

$$=cov(X,Y)\int \mathrm{g}(y)\left(\frac{y-\mu_y}{{\sigma_y}^2}\right)\varphi(y)\,dy=cov(X,Y)\int \mathrm{g}(y)\,k'(y)dy$$

ここで$k'(y)=\left(\frac{y-\mu_y}{{\sigma_y}^2}\right)\varphi(y)$であり，部分積分をおこなうと，以下の式が得られる。

$$cov(X,\mathrm{g}(y))=cov(X,Y)\left[\mathrm{g}(\infty)k(\infty)-\mathrm{g}(-\infty)k(-\infty)-\int \mathrm{g}'(y)k(y)\,dy\right]$$

さらに，$\varphi(y)=-k(y)$，$\varphi(\infty)=\varphi(-\infty)=0$，$E|\mathrm{g}'(y)|<\infty$より，$|\mathrm{g}(y)|<\infty$

よって $\mathrm{g}(\infty)k(\infty)=\mathrm{g}(-\infty)k(-\infty)$　これより，Stein's lemma が得られる。

$cov(X,\mathrm{g}(y))=cov(X,Y)[\int \mathrm{g}'(y)\varphi(y)\,dy]=E[\mathrm{g}'(y)]cov(X,Y)$・・・・(30)

QED

次に，この Stein’s lemma を用いて，(28)を導出しよう。まず(15)と(27)より

$1=E(mR^i)=E\left(\frac{\rho u'(c_1)}{u'(c_0)}R^i\right)$・・・・(31)

(24)と(25)の予算制約式より，異時点間の限界代替率がR^wの関数として表されることより，

$\frac{\rho u'(c_1)}{u'(c_0)}=\frac{\rho u'\left(R^w(W_0-c_0)\right)}{u'(c_0)}=q(R^w)$　とし，(31)に代入すると

$E(mR^i)=E(q(R^w),R^i)=E\left(q(R^w)\right)E(R^i)+cov(q(R^w),R^i)$

これより，

$$\begin{aligned}E(mR^i)&=E\left(q(R^w)\right)E(R^i)+E[q'(R^w)]cov(R^w,R^i)\\&=E\left(q(R^w)\right)E(R^i)+E[q'(R^w)]\{E(R^wR^i)-E(R^w)E(R^i)\}\\&=E\left\{E\left(q(R^w)\right)R^i\right\}+E\left\{E[q'(R^w)]\left(R^w-E(R^w)\right)R^i\right\}\\&=E\left[\left\{E\left(q(R^w)\right)+E[q'(R^w)]\left(R^w-E(R^w)\right)\right\}R^i\right]\\&=E\left[\left\{E\left(q(R^w)\right)-E[q'(R^w)]E(R^w)+E[q'(R^w)]R^w\right\}R^i\right]\cdots\cdots(32)\end{aligned}$$

よって，

$m=E\left(q(R^w)\right)-E[q'(R^w)]E(R^w)+E[q'(R^w)]R^w$　となる。

ここで，$a = E\left(q(R^w)\right) - E[q'(R^w)]E(R^w)$　$b = E[q'(R^w)]$　とすると，
$m = a + bR^w$となることが示される。
ここで，異時点間の代替率との関係式を用いた Stein's lemma を再掲しよう。

$$cov(m, R^i) = E\left[\frac{\rho(W_0 - c_0)u"\left(R^w(W_0 - c_0)\right)}{u'(c_0)}\right] cov(R^w, R^i)\cdot\cdot\cdot\cdot(33)$$

以上の議論より，効用関数が二次関数の場合か，任意の二資産の収益率が同時正規分布に従う時のみ，ベータ価格式は CAPM と一致することが理解されよう。このことは，CAPM が一般的なベータ価格式に比して特殊ケースであることを示している。

Ⅴ．確率的割引ファクターの経済的含意

確率的割引ファクターは，状態価格を主観的な生起確率で除した数値として定義されている。この定義自体から経済的ないしは経済学的な意味を引き出すことは困難である。しかし，消費者の期待効用最大化から，異時点間の限界代替率として確率的割引ファクターを捉える時，生起確率と状態価格の関係に意味づけが可能となる。以下において，具体例を用いて議論を進めよう。

ここでは，株式 A，株式 B そして国債の 3 資産と 3 つの状態のケースについて考えよう。状態 1 は好況，状態 2 は通常，そして状態 3 を不況とする。3 つの証券の一株あたりの単価が次表で与えられているとしよう。（なお単位は百円である。）

	価　格	状態 1 （好況）	状態 2 （通常）	状態 3 （不況）
株式 A	10	10	15	4
株式 B	12	20	10	8
国債	0.95	1	1	1

(1)の状態価格による価格式にこの表の数値を代入し，連立方程式を解くと，状態価格$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, は，$\varphi_1 = 0.3$　$\varphi_2 = 0.4$　$\varphi_3 = 0.25$　となる。また，ここで国債（無リスク債権）の収益率（利子率）を r とすると，$1 = \left(1 + \mathrm{r}\right)(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$　より，$r \risingdotseq 0.053$　となる。

次に，状態１，２，３の生起確率f_iを以下のように設定し，確率的割引ファクター$m_i\ (i=1,2,3)$ を求めよう。

$f_1=\frac{1}{4}\quad f_2=\frac{1}{2}\quad f_3=\frac{1}{4}$　とする。これより $m_i=\frac{\varphi_i}{f_i}\ (i=1,2,3)$となることより，

$m_1=1.2\quad m_2=0.8\quad m_3=1.0$　となる。この生起確率の設定は，異時点間の限界代替率との関係でどのような意味を持つだろうか。

実は，この具体例で示される$m_i\ (i=1,2,3)$ の値は，限界代替率の理論的想定と整合的ではない。上の例では，好況時の値m_1が，不況時の値m_3より大きくなっているが，理論的想定では逆の方が整合的である。

好況時には株式の株価・配当は上昇し，富は増大する。この時，限界効用の逓減ないし限界代替率逓減の法則により，確率的割引ファクターは低下すると考えられる。確率的割引ファクターは今期の限界効用１単位の減少に対する来期の限界効用の増分を示していることから，不況時には，確率的割引ファクターの上昇することが妥当である。このことから，限界代替率との理論的整合性を有する確率的割引ファクター（すなわち生起確率）を設定することができる。以下で１例を示そう。

上掲の具体例より状態価格$\varphi_1=0.3\quad \varphi_2=0.4\quad \varphi_3=0.25$ を用いると，理論的には $m_1<m_2<m_3$ となることより，通常時のm_2を$m_2=1$（よって$f_2=0.4$）として理論整合的な生起確率f_1，f_3を求めよう。

簡単な計算によって，$f_1+f_3=0.6$，$0.3<f_1<0.6$，$0<f_3<0.25$を満たすf_1，f_3がその候補となることがわかる。ここで$f_1=0.4$，$f_3=0.2$とし，確率的割引ファクターを求めると，$m_1=0.75\quad m_2=1\quad m_3=1.25$　となる。上掲の例からは

$f:(f_1=0.4\quad f_2=0.4\quad f_3=0.2)$　と$m:(m_1=0.75\quad m_2=1\quad m_3=1.25)$が理論的に整合的な生起確率と確率的割引ファクターとなる。

Ⅵ．ま　と　め

この研究ノートでは確率的割引ファクターと CAPM の関係について分析を行った。まずⅠ節において，確率的割引ファクターによる価格付けを考えるため，状態価格とリスク中立確率との関係について整理し，確率的割引ファクターと収益率の基本式 $E(mR)=1$ を導出した。続くⅡ節において，ベータ価格式を導出し，CAPM との関係について論じた。CAPM 導出のために，確率的割引ファクターが市場ポートフォリオ

の収益R^wの一次式で表されることが決定的に重要であることを示した。Ⅲ節においては，消費者の期待効用最大化の条件式から CAPM 導出を考えるため，２次の効用関数を想定した。Ⅳ節においては，Stein’s lemma を用いる方法により CAPM を導出した。Stein’s lemma を用いると効用関数の特定化が不要であることを示した。Ⅴ節において確率的割引ファクターの経済的含意を探り，限界代替率逓減の法則と理論的に整合的な生起確率について考えた。

参考文献

邦語文献

浦谷　規『無裁定原理とマーチンゲール』朝倉書店2005年

小林孝雄・芹田敏夫『新･証券投資論』①理論編　日本経済新聞社2012年

野口悠紀雄・藤井眞理子『現代ファイナンス理論』東洋経済新報社2005年

英語文献

Altug, S and Labadie, L *Asset Pricing for Dynamic Economies* Cambridge University Press 2008

Arrow, K “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing” Review of Economic Studies, 31, (1964), 91-6

Cochrane, J.H *Asset Pricing*, Princeton University Press 2001

Danthine, J, P and Donaldson, B *Intermediate Financial Theory* Third Edition ELSEVIER Academic Press 2014

LeRoy, S. F and Werner, J *Principles of Financial Economics* Cambridge University Press 2001

Milne, F *Finance Theory and Asset Pricing* Second Edition Oxford University Press 2003